Mathematisches Institut der Universität Bonn
S. Geschke, M.Carl

WS 10/11
25. 10. 2010
Blatt 2

Übungen zur Mengenlehre

1. (a) Zeigen Sie: Sind $(P, <_P)$, $(Q, <_Q)$ wohlgeordnete echte Klassen, so ist $(P, <_P) \simeq (Q, <_Q)$.

(b) Sei X eine Klasse von wohlgeordneten Mengen $(x, <_x)$ mit der Eigenschaft, dass keine zwei Elemente von X als Wohlordnungen isomorph sind. Für $(x, <_x)$, $(y, <_y)$ aus X sei $(x, <_x) \lhd (y, <_y)$, falls $(x, <_x)$ zu einem Anfangsstück von $(y, <_y)$ isomorph ist. Zeigen Sie, dass $(X, \lhd)$ eine wohlgeordnete Klasse ist.

2. (a) Sei $(X, <)$ eine halbgeordnete Klasse mit $M \subseteq X$. Zeigen Sie, dass M höchstens ein grösstes/kleinstes Element besitzt.

(b) Gilt das gleiche auch für maximale/minimale Elemente?

(c) Sei $(P, <)$ eine Halbordnung, wobei $P = \{p_1, ..., p_n\}$ endlich ist. Zeigen Sie: Es existiert eine totale Ordnung $\prec$ auf P, so dass $<\subset\prec$.

3. Sei $(P, <)$ eine lineare Ordnung, so dass für alle $\in$-Formeln $\phi(x, x_1, ..., x_n)$ gilt:
$\forall x_1 ... \forall x_n (\forall x \in P (\forall y \in P (y < x \rightarrow \phi(y, x_1, ..., x_n)) \rightarrow \phi(x, x_1, ..., x_n)) \rightarrow \forall x \in P \phi(x, x_1, ..., x_n))$.
Folgern Sie, dass $(P, <)$ sogar eine Wohlordnung ist.

4. Geben Sie zu jeder der folgenden Abbildungen f eine Funktion $G : V \rightarrow V$ an, so dass die nach dem Rekurssionsatz eindeutige Funktion $F : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ die fragliche Abbildung ist.
(a) $f(n) = 2^n$
(b) $f(n) = n!$
(c) $f(n)$ ist die n-te Fibonaccizahl.
(Die Folge $\langle a_n | n \in \mathbb{N} \rangle$ der Fibonaccizahlen ist gegeben durch $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.)

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 03. 11. 2010 in der Vorlesung