EINFÜHRUNG IN DIE MENGENLEHRE

STEFAN GESCHKE

Inhaltsverzeichnis

Die Axiome der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre 2
1. Einleitung 3
2. Klassen und Mengen 6
3. Ungeordnete Paare und Vereinigungen 7
4. Relationen und Funktionen 8
5. Eigenschaften von Relationen 10
6. Wohlordnungen 13
7. Induktive Beweise und rekursive Definitionen 15
8. Ordinalzahlen 20
9. Die natürlichen Zahlen und das Unendlichkeitsaxiom 23
10. Fundierte Relationen und das Fundierungsaxiom 25
11. Das Auswahlaxiom und einige Äquivalenzen 29
12. Kardinalzahlen 31
13. Kardinalzahlarithmetik 35
14. Anwendungen der Kardinalzahlarithmetik auf $\mathbb{R}$ 37
15. Reguläre und singuläre Kardinalzahlen 39
16. Summen und Produkte von unendlich vielen Kardinalzahlen 43
17. Potenzen von Kardinalzahlen 45
18. Filter und Ultrafilter 48
19. Messbare Kardinalzahlen und Maße auf $\mathbb{R}$ 50
20. Clubs und stationäre Mengen 54
21. Das Suslinsche Problem 56
22. Partitionsresultate 60
23. Ultraprodukte und der endliche Satz von Ramsey 62
24. Die Baumeigenschaft 63
25. Reflexion und elementare Submodelle 64

Date: 19.10.2010.

Dieses Skript basiert teilweise auf dem handschriftlichen Skript zur Vorlesung „Einführung in die Mengenlehre" gehalten im Sommersemester 1994 von Sabine Koppelberg.

Die Axiome der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre

Das zur Zeit populärste Axiomensystem der Mengenlehre ist das Zermelo-Fraenkelsche (ZF) zusammen mit dem Auswahlaxiom (AC, ZF+AC=ZFC). Die Sprache, in dem dieses Axiomensystem formuliert ist, ist die Sprache der erststufigen Logik mit den zweistelligen Relationssymbolen $\in$ und $=$. Wir benutzen jedoch natürliche Sprache, um die Axiome aufzuschreiben. Die Axiome lauten wie folgt:

(Null) Nullmengenaxiom. Es gibt eine Menge $\emptyset$, die keine Elemente hat.

(Ext) Extensionalitätsaxiom. Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben.

(Fund) Fundierungsaxiom. Die Relation $\in$ ist fundiert. D.h., jede nichtleere Menge hat ein $\in$-minimales Element.

(Paar) Paarmengenaxiom. Sind x und y Mengen, so ist auch $\{x, y\}$ eine Menge.

(Ver) Vereinigungsaxiom. Ist x eine Menge, so auch $\bigcup x$.

(Pot) Potenzmengenaxiom. Ist x eine Menge, so auch die Potenzmenge $\mathcal{P}(x)$.

(Un) Unendlichkeitsaxiom. Es gibt eine nichtleere Menge, die unter der Operation $x \mapsto x \cup \{x\}$ abgeschlossen ist.

(Aus) Aussonderungsaxiom. Ist E eine Eigenschaft von Mengen und x eine Menge, so ist auch $\{y \in x : y \text{ hat die Eigenschaft } E\}$ eine Menge.

(Ers) Ersetzungsaxiom. Ist x eine Menge und F eine Funktion, so ist $F[x]$ eine Menge.

Die bisherigen Axiome sind die Zermelo-Fraenkelschen. Dazu kommt noch das Auswahlaxiom.

(AC) Auswahlaxiom. Ist $(x_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtleere Mengen, so existiert eine Funktion $f : I \to \bigcup\{x_i : i \in \mathrm{I}\}$, so dass für alle $i \in I$ gilt: $f(i) \in x_i$.

1. Einleitung

1.1. **Warum Axiome?** Nach Cantor ist eine Menge „eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterschiedenen Gegenständen unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen“. Es ist aber nicht jede solche „Zusammenfassung zu einem Ganzen“ eine Menge. Betrachte nämlich das Objekt

$$y = \{x : x \text{ ist eine Menge mit } x \notin x\}.$$

Wenn y eine Menge ist, so gilt entweder $y \in y$ oder $y \notin y$.

Im ersten Fall gilt $y \notin y$ nach Definition von y, ein Widerspruch zu $y \in y$. Im zweiten Fall gilt $y \in y$ nach Definition von y, ein Widerspruch zu $y \notin y$. Damit kann y keine Menge sein. Das ist die berühmte *Russellsche Antinomie*.

Wir wären nun gerne in der Lage, von einer gegebenen Gesamtheit mit Sicherheit zu sagen, dass sie eine Menge ist. Das leistet die axiomatische Mengenlehre. Man führt gewisse Axiome ein, die sagen, dass gewisse Gesamtheiten Mengen sind und wie man aus Mengen neue Mengen konstruieren kann.

Die Einführung von Axiomen hat verschiedene Gründe. Zum einen spielt einem die Intuition zumindest bei unendlichen Mengen den einen oder anderen Streich, so dass es gut ist, wenn man Axiome hat, auf deren Grundlage man sämtliche Beweise führt. Zum anderen gibt es mengentheoretische Probleme, die sich nur innerhalb eines festen Axiomensystems sinnvoll behandeln lassen. Ein Beispiel ist die *Kontinuumshypothese* (CH):

> Jede Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist entweder endlich oder es gibt eine Bijektion zwischen X und $\mathbb{N}$ oder es gibt eine Bijektion zwischen X und $\mathbb{R}$.

Die Kontinuumshypothese konnte man lange weder beweisen noch widerlegen. Nachdem man sich auf ein Axiomensystem geeinigt hatte, konnten Gödel und Cohen beweisen, dass weder CH noch ¬CH aus den Axiomen folgt.

Ein Axiomensystem für die Mengenlehre sollte folgende Eigenschaften haben:

(1) Die Axiome entsprechen unseren intuitiven Vorstellungen vom Begriff „Menge“.
(2) Im wesentlichen lässt sich jede beweisbare mathematische Aussage als Aussage über Mengen auffassen und folgt als solche aus den Axiomen.
(3) Aus den Axiomen lassen sich keine Widersprüche ableiten. (Das Axiomensystem ist *widerspruchsfrei*.)

Die drei Eigenschaften sind bewusst vage formuliert, damit wir uns nicht in logische Probleme verstricken. So gibt es zum Beispiel durchaus sinnvolle mathematische Objekte, die keine Mengen sind, zum Beispiel das oben erwähnte $\{x : x \notin x\}$. Das macht aber keine großen Schwierigkeiten, wenn man weiß, wie mit solchen Objekten umzugehen ist.

Etwas problematisch ist auch die Forderung (3). Gödel hat nämlich gezeigt, dass man mit Hilfe eines Axiomensystems, das (2) erfüllt, nicht beweisen kann, dass dieses Axiomensystem widerspruchsfrei ist, es sei denn das Axiomensystem ist nicht widerspruchsfrei.

Kurz gesagt, innerhalb eines sinnvollen Axiomensystems für die Mengenlehre lässt sich die mathematische Aussage „das Axiomensystem führt nicht zu Widersprüchen“ nicht beweisen. In diesem Sinne kann sich die Mathematik also nicht selbst am Schopf aus dem Sumpf ziehen. Damit ist Hilberts Programm, nämlich die Mathematik auf ein Fundament zu stellen, das es erlaubt zu beweisen, dass das Fundament und die darauf beruhende Mathematik widerspruchsfrei sind, gescheitert.

Das ist aber nicht so schrecklich, wie es klingt. Wir werden ein Axiomensystem vorstellen, ZFC, das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem (ZF) zusammen

mit dem Auswahlaxiom (AC), das in der mathematischen Welt insofern anerkannt ist, als dass praktisch alle Mathematiker, zumindest die, die verstehen, was das Axiomensystem sagt, davon ausgehen, dass ZFC die Forderungen (1)–(3) im wesentlichen[1] erfüllt.

1.2. **Die Sprache der Mengenlehre.** Um über Mengen zu reden, benutzt man außer den üblichen logischen Symbolen $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\exists$, $\forall$, Variablennamen wie x und y und den Klammern (,) nur die Relationen $\in$ und $=$. Natürlich werden wir hauptsächlich natürliche Sprache benutzen, die man aber formalisieren könnte, wenn man wollte. Relationen wie $\subseteq$ und Konstanten wie $\emptyset$ werden als Abkürzungen definiert:

$$x \subseteq y \quad :\Leftrightarrow \quad \forall z(z \in x \to z \in y)$$

$\emptyset$ ist diejenige Menge x, für die gilt $\forall y(y \notin x)$.

Zunächst drängt sich einem der Eindruck auf, dass eine solche Sprache viel zu schwach ist, um frei über Mathematik reden zu können. Insbesondere scheint die Benutzung der einzigen Relation $\in$ eine große Einschränkung zu sein. Letzteres ist aber nicht der Fall. Man muss nur gewisse Dinge als Mengen definieren die man üblicherweise nicht für Mengen hält. Zum Beispiel lassen sich natürliche Zahlen wie folgt definieren:

Setze $0 := \emptyset$. Angenommen wir haben bereits die natürliche Zahl n als Menge definiert. Setze dann $n + 1 := n \cup \{n\}$. Hierbei ist $a \cup b$ die Abkürzung, für die Menge, deren Elemente genau die Elemente von a zusammen mit den Elementen von b ist. Analog ist $\{c\}$ die Menge, deren einziges Element c ist. Die Menge aller natürlicher Zahlen wird wie üblich mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Wir werden später noch eine andere Bezeichnung sowie ein genaue Definition dieser Menge kennenlernen.

Übung 1.1. *Zeige, dass für jede natürliche Zahl n gilt:*

$$n = \{m \in \mathbb{N} : m < n\}$$

Schließe daraus für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Mengen a

$$a \in n \quad \Leftrightarrow \quad a \in \mathbb{N} \wedge a < n.$$

Auch die Operation $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ lässt sich als Menge auffassen, nämlich als

$$\{(n, m, k) : n, m, k \in \mathbb{N} \wedge n + m = k\}.$$

Wir werden später sehen, wie Paare oder Tripel wie (n, m, k) als Menge definiert werden. Die genaue Definition der Menge $+ \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist übrigens nicht trivial. Hier sieht es nur so aus, da wir davon ausgehen, dass wir wissen, was $n + m$ für natürliche Zahlen n und m ist. Wir werden darauf später näher eingehen.

Hat man erstmal die natürlichen Zahlen zur Verfügung, ist es nicht mehr schwer auch $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ als Mengen von Mengen zu konstruieren. (Was übrigens auch das übliche Vorgehen ist, welches man z.B. aus der Analysis-Vorlesung kennt. Nur die natürlichen Zahlen fallen oft vom Himmel.) Wenn man ein Objekt wie zum Beispiel $\mathbb{N}$ konstruiert hat, muss man mit Hilfe der Axiome nachweisen, das diese Menge auch existiert. D.h., man muss die Existenz von $\mathbb{N}$ aus den Axiomen folgern. Danach muss man aus den Axiomen folgern, dass die konstruierte Menge, in unserem Fall $\mathbb{N}$, auch die gewünschten Eigenschaften hat. Wir werden darauf genauer eingehen, wenn wir einige der ZFC-Axiome kennengelernt haben.

Eine genauere Betrachtung der Sprache der Mengenlehre findet in der Vorlesung „Einführung in die mathematische Logik und Modelltheorie“ statt. Insbesondere wird in der genannten Vorlesung diskutiert, was eigentlich ein Beweis ist. Auch die

[1]Es gibt immer wieder Diskussionen darüber, ob das Auswahlaxiom unserer Intuition über Mengen entspricht. Auch gibt es Diskussionen darüber, ob wirklich jede beweisbare mathematische Aussage aus ZFC folgt. Das Problem ist hierbei, zu formalisieren, was „beweisbar“ bedeutet.

Semantik, also die Bedeutung, von Formeln in der Sprache der Mengenlehre wird näher untersucht.

2. Klassen und Mengen

Alle Objekte, die wir im Laufe der Vorlesung „offiziell“ betrachten werden, sind Mengen. Dabei werden wir niemals explizit definieren, was eine Menge ist. Wir werden aber die ZFC-Axiome benutzen, um zu zeigen, dass gewisse Mengen existieren (bzw. dass gewisse Objekte Mengen sind). Neben den Mengen gibt es noch *Klassen*. Eine Klasse ist ein Objekt der Form $C = \{x : E(x)\}$, wobei E eine Eigenschaft von Mengen ist. Die Variable x läuft dabei über alle Mengen.

Eine Klasse ist also eine Gesamtheit von Mengen, wobei das Kriterium für die Zugehörigkeit einer Menge zu einer Klasse eine nur von der Klasse abhängige Eigenschaft von Mengen ist. Damit braucht man Klassen im Grunde genommen nicht einführen, da man genauso gut von Eigenschaften von Mengen reden könnte. Der Klassenbegriff ist aber sehr angehm für die Intuition. Es gibt auch Axiomatisierungen der Mengenlehre (z.B. NGB, die Mengenlehre von von Neumann, Gödel und Bernays), in der Klassen zulässige Objekte sind, die dann allerdings nicht selbst als Elemente von Klassen auftreten dürfen. Letzteres ist notwendig, damit die Russelsche Antinomie nicht zum Widerspruch führt.

Um genau zu definieren, was eine *Eigenschaft von Mengen* ist, ist eigentlich wieder ein Ausflug in die mathematische Logik nötig. Grob gesagt ist eine *Eigenschaft von Mengen* eine Eigenschaft, die sich in der Sprache der Mengenlehre hinschreiben lässt, wobei man endlich viele feste Mengen als Parameter benutzen darf.

Es ist nützlich, gewisse Operationen und Relationen zwischen Klassen zu definieren.

Definition 2.1. Seien $C = \{x : E(x)\}$ und $D = \{x : F(x)\}$ Klassen. Dann ist C eine *Teilklasse* von D ($C \subseteq D$), falls für alle Mengen x gilt: $E(x) \Rightarrow F(x)$. Die Klassen sind gleich ($C = D$), wenn $C \subseteq D$ und $D \subseteq C$ gelten, wenn also C und D dieselben Elemente haben. Das *Komplement* $-C$ ist die Klasse $\{x \neg E(x)\}$. Die *Vereinigung* $C \cup D$ ist die Klasse $\{x : E(x) \vee F(x)\}$. Der *Durchschnitt* $C \cap D$ ist die Klasse $\{x : E(x) \wedge F(x)\}$. Die *Differenz* $C \setminus D$ ist die Klasse $\{x : E(x) \wedge \neg F(x)\}$.

Eine Menge y identifizieren wir mit der Klasse $\{x : x \in y\}$. Eine Klasse ist eine *echte* Klasse, wenn sie keine Menge ist. Die *Allklasse* bzw. die *Klasse aller Mengen* ist die Klasse $V = \{x : x = x\}$.

Implizit wird in dieser Definition bereits gesagt, wann zwei Mengen gleich sind, nämlich wenn sie dieselben Elemente haben. Damit zwei Mengen immer dann gleich sind, wenn sie als Klassen gleich sind, muss man folgendes fordern:

(Ext) Extensionalitätsaxiom. Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben.

Um zu garantieren, dass es überhaupt Mengen gibt, gibt es das

(Null) Nullmengenaxiom. Es gibt eine Menge, die keine Elemente hat.

In Definition 2.1 haben wir implizit bereits den Durchschnitt zweier Mengen definiert. Natürlich hätte man gerne, dass der Durchschnitt zweier Mengen wieder eine Menge ist. Das folgende Axiom besagt sogar, dass der Durchschnitt einer Menge mit einer Klasse wieder eine Menge ist.

(Aus) Aussonderungsaxiom. Ist E eine Eigenschaft von Mengen und x eine Menge, so ist auch $\{y : y \in x \wedge y$ hat die Eigenschaft $E\}$ eine Menge.

Aus dem Aussonderungsaxiom folgt auch, dass die Differenz zweier Mengen wieder eine Menge ist.

Wenn man das Aussonderungsaxiom zur Verfügung hat, folgt aus der Existenz einer beliebigen Menge auch die Existenz der leeren Menge.

Definition und Lemma 2.2. *Angenommen es gibt eine Menge x. Dann gibt es auch eine Menge, die keine Elemente hat. Diese Menge ist eindeutig bestimmt und heißt die* leere Menge. *Man bezeichnet sie mit $\emptyset$.*

Beweis. Sei x eine Menge. Nach dem Aussonderungsaxiom ist auch $z := \{y \in x : y \neq y\}$ eine Menge. Offenbar hat z keine Elemente. Sind z und z' Menge ohne Elemente, so gilt nach dem Extensionalitätsaxiom $z = z'$. □

Übung 2.1. *Seien A, B und C Klassen. Zeige die folgenden Aussagen:*
a) $\emptyset \subseteq A \wedge A \subseteq V$
b) $A \subseteq A$
c) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

Übung 2.2. *Seien A, B und C Klassen. Zeige die folgenden Aussagen:*
a) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$
b) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$
c) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
e) $-(B \cap C) = -B \cup -C$, $-(B \cup C) = -B \cap -C$
f) $A \cup -A = V$, $A \cap -A = \emptyset$

3. Ungeordnete Paare und Vereinigungen

Definition 3.1. Für zwei Mengen x und y sei $\{x, y\}$ die Klasse $\{z : z = x \vee z = y\}$, das *ungeordnete Paar* von x und y. Man schreibt $\{x\}$ für $\{x, x\}$.

(Paar) Paarmengenaxiom. Sind x und y Mengen, so ist auch $\{x, y\}$ eine Menge.

Definition 3.2. Für zwei Menge x und y sei (x, y) die Klasse $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, das *geordnete Paar* von x und y.

Man beachte, dass aus dem Paarmengenaxiom folgt, dass (x, y) eine Menge ist. Das wesentliche an der Definition von geordneten Paaren ist, dass Lemma 3.3 gilt. Es gibt auch andere sinnvolle Möglichkeiten, geordnete Paare zu definieren.

Lemma 3.3. *Seien a, b, x und y Mengen. Dann gilt $(a, b) = (x, y)$ genau dann, wenn $a = x$ und $b = y$ gelten.*

Man kann nun auch geordnete Tripel definieren mittels $(x, y, z) := ((x, y), z)$. Analog kann man geordnete n-Tupel definieren durch $(x_1, \ldots, x_n) = ((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$. Es gilt dann

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n.$$

Definition 3.4. Sei C eine Klasse. Wir definieren den *Durchschnitt* $\bigcap C$ und die *Vereinigung* $\bigcup C$ über C:

$$\bigcap C := \{x : \text{für jedes } c \in C \text{ ist } x \in c\}$$

$$\bigcup C := \{x : \text{es gibt ein } c \in C \text{ mit } x \in c\}$$

Ist $C \neq \emptyset$, so ist $\bigcap C$ eine Menge. Sei nämlich $c \in C$. Dann ist $\bigcap C = c \cap \bigcap C$, also Durchschnitt einer Menge mit einer Klasse. Nach dem Aussonderungsaxiom ist $\bigcap C$ also eine Menge. Ist $C = \emptyset$, so erhält man $\bigcap C = V$. V ist nach dem Aussonderungsaxiom eine echte Klasse, da sonst mit V auch $\{x : x \notin x\}$ eine Menge wäre.

Ist $C = \emptyset$, so ist $\bigcup C = \emptyset$, also eine Menge.

(Ver) Vereinigungsaxiom. Ist x eine Menge, so auch $\bigcup x$.

Lemma 3.5. *a) Sind x und y Mengen, so ist auch $x \cup y$ Menge.*
b) Ist a eine Menge, so ist $-a$ eine echte Klasse.

Beweis. a) Nach dem Paarmengenaxiom ist $z = \{x, y\}$ eine Menge. Nach dem Vereinigungsaxiom ist $\bigcup z = x \cup y$ eine Menge.
b) Wäre $-a$ eine Menge, so auch $a \cup -a = V$, ein Widerspruch. □

4. Relationen und Funktionen

Definition 4.1. Für zwei Klassen C und D sei

$$C \times D := \{p : \text{es gibt } x \in C \text{ und } y \in D \text{ mit } p = (x, y)\}.$$

Kürzer schreibt man auch $C \times D = \{(x, y) : x \in C \wedge y \in D\}$. Analog definiert man

$$C \times D \times E := \{(x, y, z) : x \in C \wedge y \in D \wedge z \in E\}$$

und so weiter.

Eine Klasse R heißt (*zweistellige*) *Relation*, falls alle Elemente von R geordnete Paare sind, falls also $R \subseteq V \times V$ gilt. (Analog heißt R *n-stellige Relation*, wenn alle Elemente von R geordnete n-Tupel sind.)

Eine *Funktion* ist eine Relation F für die gilt

$$\forall x, y, z((x, y) \in F \wedge (x, z) \in F \Rightarrow y = z).$$

Anstelle von $(x, y) \in F$ schreibt man dann $y = F(x)$. Analog kann man n-stellige Funktionen definieren als $n + 1$-stellige Relationen F mit

$$\forall x_1, \ldots, x_n, y, z((x_1, \ldots, x_n, y) \in F \wedge (x_1, \ldots, x_n, z) \in F \Rightarrow y = z).$$

Wieder schreibt man $F(x_1, \ldots, x_n) = y$ anstelle von $(x_1, \ldots, x_n, y) \in F$.

Definition 4.2. Für Relationen R und S definieren wir
$S \circ R := \{(x, z) : \exists y((x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$,
$R^{-1} := \{(y, x) : (x, y) \in R\}$,
$\operatorname{vb} R := \{x : \exists y((x, y) \in R)\}$ (*Vorbereich von R*),
$\operatorname{nb} R := \{y : \exists x((x, y) \in R)\}$ (*Nachbereich von R*) und
$\operatorname{fd} R := \operatorname{vb} R \cup \operatorname{nb} R$ (*Feld von R*).

Für eine Klasse X sei $\operatorname{id}_X := \{(x, x) : x \in X\}$ die *Identität* auf X. Eine Funktion F heißt *injektiv*, falls für alle $x, y \in \operatorname{vb} F$ gilt:

$$F(x) = F(y) \Rightarrow x = y$$

Lemma 4.3. *a) Für beliebige Relationen R, S und T gilt*

$$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$$

sowie

$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

b) Sind F und G Funktionen, so ist auch $F \circ G$ eine Funktion.

c) Sei F eine Funktion und $X = \operatorname{vb} F$. Dann ist F^{-1} genau eine Funktion, wenn F injektiv ist. In diesem Falle gilt $F^{-1} \circ F = \operatorname{id}_X$.

d) Sind F und G Funktionen und ist x eine Menge mit $x \in \operatorname{vb} F$ und $F(x) \in \operatorname{vb} G$, so ist $x \in \operatorname{vb}(G \circ F)$ und es gilt $(G \circ F)(x) = G(F(x))$.

Definition 4.4. Sei R eine Relation und A eine Klasse. Dann ist

$$R[A] := \{y : \exists x(x \in A \wedge (x, y) \in R)\}$$

das *Bild* von A unter R.

Sei F eine Funktion und $I = \operatorname{vb} F$. Dann schreibt man anstelle von $F = \{(i, F(i)) : i \in I\}$ auch $(F(i))_{i \in I}$ oder $(F_i)_{i \in I}$. Letzteres ist die *Familienschreibweise*.

Lemma 4.5. *Seien R und S Relationen, F Funktion und A, B und X Klassen.*
a) $(S \circ R)[A] = S[R[A]]$
b) $R[A \cup B] = R[A] \cup R[B]$
c) $R[A \cap B] \subseteq R[A] \cap R[B]$ *(Im allgemeinen gilt die Gleichheit nur für injektive Funktionen)*
d) $F[A] = \{F(x) : x \in (\mathrm{vb}\, F \cap A)\}$, $F^{-1}[A] = \{x : x \in \mathrm{vb}\, F \wedge F(x) \in A\}$
e) $F^{-1}[A \cup B] = F^{-1}[A] \cup F^{-1}[B]$, $F^{-1}[A \cap B] = F^{-1}[A] \cap F^{-1}[B]$,
$F^{-1}[X \setminus A] = F^{-1}[X] \setminus F^{-1}[A]$

Definition 4.6. Sei F eine Funktion, A und B Klassen. Wir schreiben
$F : A \xrightarrow{aus} B$, falls $\mathrm{vb}\, F \subseteq A$ und $\mathrm{nb}\, F \subseteq B$,
$F : A \to B$, falls $\mathrm{vb}\, F = A$ und $\mathrm{nb}\, F \subseteq B$,
$F : A \twoheadrightarrow B$, falls $\mathrm{vb}\, F = A$ und $\mathrm{nb}\, F = B$,
$F : A \hookrightarrow B$, falls $\mathrm{vb}\, F = A$, $\mathrm{nb}\, F \subseteq B$ und F injektiv ist,
$F : A \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow B$, falls $\mathrm{vb}\, F = A$, $\mathrm{nb}\, F = B$ und F bijektiv ist.

Einige der Fragen, wann gewisse mit Relationen und Funktionen zusammenhängende Klassen Mengen sind, können wir bereits beantworten. Andere Fragen werden durch Axiome beantwortet, die wir noch einführen werden.

Lemma 4.7. *Sei R eine Relation, die Menge ist. Dann sind auch* $\mathrm{vb}\, R$, $\mathrm{nb}\, R$ *und* $\mathrm{fd}\, R$ *Mengen. Ist A eine Klasse, so ist $R[A]$ eine Menge.*

Beweis. Die Elemente von R haben die Form $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ mit $x \in \mathrm{vb}\, R$ und $y \in \mathrm{nb}\, R$. Daher gilt

$$\bigcup R = \{\{x\} : x \in \mathrm{vb}\, R\} \cup \{\{x, y\} : (x, y) \in R\}.$$

Es folgt

$$\bigcup\bigcup R = \{x : x \in \mathrm{vb}\, R\} \cup \{y : y \in \mathrm{nb}\, R\} = \mathrm{vb}\, R \cup \mathrm{nb}\, R = \mathrm{fd}\, R.$$

Nach dem Vereinigungsaxiom sind $\bigcup R$ und $\bigcup\bigcup R$ Mengen. Damit ist $\mathrm{fd}\, R$ eine Menge. Wegen $\mathrm{vb}\, R, \mathrm{nb}\, R, R[A] \subseteq \mathrm{fd}\, R$ folgt aus dem Aussonderungsaxiom, dass $\mathrm{vb}\, R$, $\mathrm{nb}\, R$ und $R[A]$ Mengen sind. □

Definition 4.8. Für eine Klasse C sei

$$\mathcal{P}(C) := \{x : x \subseteq C\}$$

die *Potenzklasse* von C.

(Pot) Potenzmengenaxiom. Ist x eine Menge, so auch die Potenzmenge $\mathcal{P}(x)$.

Lemma 4.9. *a) Sind a und b Mengen, so ist auch $a \times b$ Menge.*
b) Ist R eine Relation und sind $\mathrm{vb}\, R$ *und* $\mathrm{nb}\, R$ *Mengen, so ist R Menge.*
c) Ist $F : a \to b$ eine Funktion und sind a und b Mengen, so ist auch F Menge.

Beweis. a) Mit a und b ist auch $a \cup b$ Menge. Nach (Pot) sind auch $\mathcal{P}(a \cup b)$ und $\mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ Mengen. Nach (Aus) genügt es, $a \times b \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b))$ zu zeigen. Sei $(x, y) \in a \times b$, also $x \in a$ und $y \in b$. Dann gilt

$$\{x\}, \{x, y\} \in \mathcal{P}(a \cup b)$$

und

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(a \cup b)).$$

b) Es gilt $R \subseteq \mathrm{vb}\, R \times \mathrm{nb}\, R$. Damit ist R Menge nach (Aus).
c) $F \subseteq a \times b$ ist Menge nach a) und (Aus). □

Definition 4.10. Für Mengen a und b sei

$$^a b := \{f : f \text{ ist Funktion von } a \text{ nach } b\}.$$

Oft schreibt man für $^a b$ auch einfach b^a.

Lemma 4.11. *Sind a und b Mengen, so ist auch $^a b$ eine Menge.*

Beweis. Sei $f \in {}^a b$, also $f : a \to b$. Dann ist $f \subseteq a \times b$, also $f \in \mathcal{P}(a \times b)$.
Insgesamt ist $^a b \subseteq \mathcal{P}(a \times b)$ und damit Menge. □

Wir haben schon gesehen, dass für jede Klasse A und jede Relation R, die Menge ist, auch $R[A]$ eine Menge ist. Ist die Relation R eine Klasse und a eine Menge, so ist $R[a]$ im Allgemeinen keine Menge. Betrachte zum Beispiel die Relation $R = V \times V$. Falls a nicht leer ist, so ist $R[a] = V$, also eine echte Klasse.

Ist F eine Funktion, so fordert man axiomatisch, dass $F[x]$ eine Menge ist, falls x Menge ist.

(Ers) Ersetzungsaxiom. Ist x eine Menge und F eine Funktion, so ist $F[x]$ eine Menge.

In den meisten Anwendungen des Funktionenbegriffs in der Mathematik kommt man ohne das Ersetzungsaxiom aus, da man im Allgemeinen zu einer Funktion F auch zwei Mengen a und b mit $F \subseteq a \times b$ gegeben hat. In diesem Falle ist für jede Menge x die Klasse $F[x] \subseteq b$ Menge nach (Aus).

Man braucht das Ersetzungsaxiom nur für Funktionen $F : A \to B$, bei denen man nicht weiß, ob B eine Menge ist.

Lemma 4.12. *Sei F eine Funktion und a eine Menge mit* $\operatorname{vb} F \subseteq a$. *Dann ist F Menge.*

Beweis. $\operatorname{nb} F = F[\operatorname{vb} F] = F[a]$ ist eine Menge nach (Ers). Also ist $a \times \operatorname{nb} F$ eine Menge. Damit ist $F \subseteq a \times \operatorname{nb} F$ eine Menge nach (Aus). □

Definition 4.13. Für eine Funktion F und eine Klasse A sei

$$F \restriction A = \{(x, y) : (x, y) \in F \wedge x \in A\}$$

die *Einschränkung* von F auf A.

Man beachte, dass die Einschränkung einer Funktion auf eine Menge nach Lemma 4.12 eine Menge ist.

5. Eigenschaften von Relationen

Für eine Relation R schreiben wir anstelle von $(x, y) \in R$ auch xRy. Statt R benutzen wir auch, je nach Zusammenhang, die Symbole $<$, $\leq$, $\sim$ usw.

Definition 5.1. Sei R eine Relation und X eine Klasse. R heißt Relation *auf* X, falls $R \subseteq X \times X$ gilt.

R heißt *reflexiv* auf X, falls xRx für alle $x \in X$ gilt. (D.h., falls $\operatorname{id}_X \subseteq R$ gilt.)

R heißt *irreflexiv* auf X, falls xRx für kein $x \in X$ gilt. (D.h., falls $R \cap \operatorname{id}_X = \emptyset$ gilt.)

R heißt *symmetrisch*, falls für alle x und y gilt:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad yRx$$

R heißt *antisymmetrisch*, falls für alle x und y gilt:

$$xRy \wedge yRx \quad \Rightarrow \quad x = y$$

R heißt *transitiv*, falls für alle x, y und z gilt:

$$xRy \wedge yRz \quad \Rightarrow \quad xRz$$

Definition 5.2. Eine Relation $\sim$ auf einer Klasse X heißt *Äquivalenzrelation*, wenn $\sim$ auf X transitiv, reflexiv und symmetrisch ist. Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, so sei für jedes $x \in X$

$$[x]_\sim := \{y \in X : x \sim y\}$$

Äquivalenzklasse von x bzgl. $\sim$.

Definition 5.3. Eine Klasse P heißt *Partition* einer Klasse X, wenn folgendes gilt:

(1) $P \subseteq \mathcal{P}(X)$, d.h., die Elemente von P sind Teilmengen von X.
(2) Die Elemente von P sind nicht leer.
(3) Die Elemente von P sind paarweise disjunkt.
(4) $X = \bigcup P$

Jedes $x \in X$ ist also Element von genau einem $a \in P$.

Lemma 5.4. *Für eine feste Klasse X entsprechen die Äquivalenzrelationen auf X, deren Äquivalenzklassen Mengen sind, eineindeutig den Partitionen von X. Jede Partition P von X liefert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X indem man definiert*

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \forall a \in P(x \in a \Leftrightarrow y \in a).$$

Umgekehrt induziert jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf X, deren Äquivalenzklassen Mengen sind, die Partition

$$P := \{[x]_\sim : x \in X\}.$$

Man beachte, dass für eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge X, deren Äquivalenzklassen nicht alle Mengen sind, der Ausdruck $\{[x]_\sim : x \in X\}$ nicht sinnvoll definiert ist. Intuitiv handelt es sich um eine Klasse von Klassen. Wir lassen aber nur Mengen als Elemente von Klassen zu, um uns genügend weit von der Russellschen Antinomie fernzuhalten. Aber nur Mengen können Elemente von Klassen sein, da man sonst in die Nähe der Russellschen Antinomie rückt.

Definition 5.5. Eine Relation $<$ auf einer Klasse X heißt *Halbordnung*, falls $<$ auf X irreflexiv und transitiv ist. Für $x, y \in X$ setzt man

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x < y \vee x = y.$$

Ist $<$ Halbordnung auf X, so nennt man $(X, <)$, bzw. X, falls klar klar ist, welche Relation auf X betrachtet wird, eine *halbgeordnete Klasse*.

An dieser Stelle ist nicht vollkommen klar, was mit $(X, <)$ gemeint ist, wenn X oder $<$ eine echte Klasse ist. Um dieses Problem zu beheben, kann man Paare von Klassen einführen. Für zwei Klassen (C, D) sei

$$(C, D) := C \times \{0\} \cup D \times \{1\}.$$

Man rechnet leicht nach, dass durch das Paar (C, D) die Komponenten C und D eindeutig bestimmt sind. Da wir Mengen immer mit kleinen Buchstaben bezeichnen und Klassen, von denen wir nicht wissen, ob sie Mengen sind, mit großen, ist es im folgenden immer klar ersichtlich, wenn wir von einem Paar von Klassen sprechen und nicht von einem Paar von Mengen. Mit $(X, <)$ ist ein Paar von Klassen gemeint.

Übung 5.1. *Zeige: Ist $<$ eine irreflexive und transitive Relation auf einer Klasse X, so ist $\leq := < \cup \mathrm{id}_X$ reflexiv, transitiv und antisymmetrisch auf X.*

Ist $\leq$ eine transitive und antisymmetrische Relation auf X, so ist $\leq \setminus \mathrm{id}_X$ transitiv und irreflexiv auf X.

Gemäß dieser Übung sind Relationen, die transitiv und irreflexiv sind, in einem gewissen Sinne mit Relationen austauschbar, die transitiv, reflexiv und antisymmetrisch sind. Daher nennt man auch eine transitive, reflexive, antisymmetrische Relation $\leq$ Halbordnung.

Definition 5.6. $(X, <)$ heißt *total geordnete* Klasse (und $<$ eine *totale* oder *lineare Ordnung* auf X), wenn $\leq$ Halbordnung auf X ist und für alle $x, y \in X$ gilt:

$$x = y \quad \vee \quad x < y \quad \vee \quad y < x$$

Man beachte, dass sich die drei Fälle ausschließen.

Definition 5.7. Sei $(X, <)$ eine halbgeordnete Klasse, $M \subseteq X$ und $a \in X$. Dann ist a *maximal* (*minimal*) in M, wenn $a \in M$ ist und es kein $b \in M$ gibt, für das $a < b$ ($b < a$) gilt.

a ist das *größte* (*kleinste*) Element von M, falls $a \in M$ ist und für alle $b \in M$ gilt: $b \leq a$ ($a \leq b$).

a ist *obere* (*untere*) *Schranke* von M, wenn für alle $b \in M$ gilt: $b \leq a$ ($a \leq b$).

a ist das *Supremum* (*Infimum*) von M, falls a die kleinste obere (größte untere) Schranke von M ist.

Übung 5.2. *a) Sei $(X, <)$ eine halbgeordnete Klasse und $M \subseteq X$. Hat M ein größtes (kleinstes) Element, so ist dieses eindeutig bestimmt.*

b) Zeige, dass maximale und minimale Elemente in Halbordnungen nicht notwendiger Weise eindeutig bestimmt sind.

c) Sei $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ eine (endliche) Menge, die durch $<$ halbgeordnet ist. Zeige, dass es eine totale Ordnung $\prec$ auf P gibt, die $<$ erweitert, für die also $< \subseteq \prec$ gilt.

Definition 5.8. Seien $(X, <)$ und $(X, <)$ halbgeordnete Klassen. (Wir verzichten darauf, die Relationen auf X und Y typographisch zu unterscheiden.) Weiter sei $F : X \xrightarrow{aus} Y$. F heißt *monoton*, falls für alle $x, x' \in X$ mit $x \leq x'$ gilt: $F(x) \leq F(x')$.

F heißt *streng monoton*, falls für alle $x, x' \in X$ mit $x < x'$ gilt: $F(x) < F(x')$.

F heißt *Isomorphismus*, falls $F : X \twoheadrightarrow Y$ gilt und F und F^{-1} beide streng monoton sind. Wir schreiben $F : (X, <) \xrightarrow{\cong} (Y, <)$ bzw. $F : X \xrightarrow{\cong} Y$.

$(X, <)$ und $(Y, <)$ heißen *isomorph*, wenn ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert. In diesem Falle schreiben wir $(X, <) \cong (Y, <)$.

Lemma 5.9. *Seien $(X, <)$ und $(Y, <)$ total geordnete Klassen und $F : X \xrightarrow{aus} Y$ streng monoton. Dann ist F injektiv und F^{-1} streng monoton.*

6. Wohlordnungen

Definition 6.1. Sei X eine Klasse und $<$ Relation auf X. $(X, <)$ heißt *wohlgeordnete* Klasse (und $<$ eine Wohlordnung auf X), falls gilt:

(1) $(X, <)$ ist linear geordnet.
(2) Für jedes $x \in X$ ist ${}_<x := \{y \in X : y < x\}$ eine Menge.
(3) Jede nichtleere Teilmenge a von X hat ein minimales Element (das mit $\min a$ bezeichnet wird).

In den meisten Fällen, die uns interessieren, ist X eine Menge und Bedingung (2) damit unwichtig.

Ist X durch $<$ wohlgeordnet und $C \subseteq X$, so wird C durch

$$<\restriction C := \{(x, y) : x, y \in C \wedge x < y\}$$

wohlgeordnet. Statt $<\restriction C$ oder $< \cap (C \times C)$ schreiben wir oft einfach $<$ und sagen: $(C, <)$ ist wohlgeordnet.

Lemma 6.2. *Sei $(X, <)$ wohlgeordnete Klasse und $C \subseteq X$ eine nichtleere Klasse. Dann hat C ein minimales Element* $\min C$.

Beweis. Wegen $C \neq \emptyset$ gibt es ein Element $c \in C$. Ist c minimal in C, so sind wir fertig. Ist c nicht minimal, so ist $a := \{x \in C : x < c\} \subseteq {}_<c$ eine nichtleere Menge. Wie man leicht nachrechnet, ist ein minimales Element von a auch minimales Element von C. □

Zur Veranschaulichung von Wohlordnungen machen wir einige Bemerkungen. Sei $(X, <)$ wohlgeordnet.

Falls X nicht leer ist, so hat X nach Lemma 6.2 ein minimales Element. X braucht aber kein größtes Element zu haben, wie das Beispiel $(\mathbb{N}, <)$ zeigt. Es hat also im Allgemeinen auch nicht jede Teilmenge bzw. Teilklasse von X eine obere Schranke. Ist aber $a \subseteq X$ eine Menge, die eine obere Schranke hat, so hat a auch ein Supremum, nämlich

$$\min\{s \in X : s \text{ ist obere Schranke von } a\}.$$

Ist $x \in X$ nicht größtes Element von X, so hat x einen unmittelbaren Nachfolger x', nämlich $\min\{y \in X : x < y\}$. Es hat aber nicht jedes Element von X, das nicht das kleinste ist, einen unmittelbaren Vorgänger. Ein Element $x \in X$, welches weder das kleinste Element von X ist noch einen unmittelbaren Vorgänger hat, heißt Limespunkt von X. Ist x Limespunkt von X, so gilt für alle $z \in X$:

$$z < x \quad \Rightarrow \quad z' < x$$

Lemma 6.3. *Sei $(X, <)$ wohlgeordnet und $F : X \to X$ streng monoton. Dann gilt für alle $x \in X$: $x \leq F(x)$.*

Beweis. Angenommen nicht. Dann existiert ein $x \in X$ mit $F(x) < x$. Da $<$ Wohlordnung ist, existiert ein x, das minimal mit dieser Eigenschaft ist. Setze $y := F(x)$. Es gilt also $y = F(x) < x$. Die strenge Monotonie von F liefert $F(y) < F(x) = y$. Nun gilt aber $y < x$. Damit war x nicht minimal mit $F(x) < x$. Ein Widerspruch. □

Korollar 6.4. *Sei $(X, <)$ wohlgeordnet. Dann ist* id_X *der einzige Isomorphismus von $(X, <)$ nach $(X, <)$.*

Beweis. Sei $F : X \to X$ ein Isomorphismus. Dann ist F streng monoton. Nach Lemma 6.3 gilt also für alle $x \in X$: $x \leq F(x)$. Da auch F^{-1} streng monoton ist, gilt für alle $x \in X$: $F(x) \leq F^{-1}(F(x)) = x$. Damit ist $F = \mathrm{id}_X$. □

Korollar 6.5. *Seien $(X, <)$ und $(Y, <)$ wohlgeordnet. Wenn X und Y isomorph sind, dann ist der Isomorphismus zwischen X und Y eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $F : X \to Y$ und $G : X \to Y$ Isomorphismen. Dann ist

$$G^{-1} \circ F : X \to X$$

ein Isomorphismus. Nach Lemma 6.4 ist $G^{-1} \circ F = \mathrm{id}_X$. Damit ist $G = F$. □

Definition 6.6. Sei $(X, <)$ wohlgeordnet. Ein *Anfangsstück* von X ist eine Klasse $C \subseteq X$ mit

$$\forall c \in C \forall x \in X (x \leq c \Rightarrow x \in C).$$

C ist *echtes* Anfangsstück von X, falls $C \neq X$ ist.

Ist C echtes Anfangsstück von X, so sei $y := \min\{x \in X : x \notin C\}$. Wie man leicht sieht ist $C = {}_{<}y$, also Menge.

Korollar 6.7. *Eine wohlgeordnete Klasse $(X, <)$ ist zu keinem echten Anfangsstück von X isomorph.*

Beweis. Sei C ein echtes Anfangsstück von X. Angenommen, es gibt einen Isomorphismus $F : X \to C$. C ist von der Form ${}_{<}y$ für ein $y \in X$. Offenbar ist $F(y) \in C$. Damit gilt $F(y) < y$, im Widerspruch zu Lemma 6.3. □

Satz 6.8. *Seien $(X, <)$ und $(Y, <)$ wohlgeordnete Klassen. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:*

1. *$(X, <)$ ist zu $(Y, <)$ isomorph.*
2. *$(X, <)$ ist zu einem echten Anfangsstück von $(Y, <)$ isomorph.*
3. *$(Y, <)$ ist zu einem echten Anfangsstück von $(X, <)$ isomorph.*

Beweis. Nach Korollar 6.7 schließen sich die drei Fälle gegenseitig aus.

Wir setzen

$$F := \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y \wedge ({}_{<}x, <) \cong ({}_{<}y, <)\}.$$

Nach Korollar 6.7 gibt es zu jedem $x \in X$ höchstens ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in F$. F ist also Funktion:

$$F : X \xrightarrow{aus} Y$$

Aus Symmetriegründen gibt es zu jedem $y \in Y$ auch höchstens ein $x \in X$ mit $(x, y) \in F$. F ist also injektiv.

Außerdem ist $\mathrm{vb}\, F$ ein Anfangsstück von X. Sei nämlich $x \in \mathrm{vb}\, F$, $F(x) = y$ und $x_1 < x$ für ein $x_1 \in X$. Wegen $F(x) = y$ existiert ein Isomorphismus $f : {}_{<}x \to {}_{<}y$. Wegen $x_1 \in {}_{<}x$ kann man $y_1 := f(x_1)$ definieren. Damit gilt $y_1 \in {}_{<}y$, also $y_1 < y$. Nun ist $f \restriction {}_{<}x_1$ Isomorphismus zwischen ${}_{<}x_1$ und ${}_{<}y_1$. Nach Definition von F gilt also $F(x_1) = y_1$ und damit $x_1 \in \mathrm{vb}\, F$. Das zeigt, dass $\mathrm{vb}\, F$ ein Anfangsstück von X ist. Aus Symmetriegründen ist $\mathrm{nb}\, F$ ein Anfangsstück von Y.

Schließlich zeigt diese Betrachtung, dass F und F^{-1} streng monoton sind. Damit ist F ein Isomorphismus zwischen $\mathrm{vb}\, F$ und $\mathrm{nb}\, F$.

Angenommen, $\mathrm{vb}\, F$ ist echtes Anfangsstück von X und $\mathrm{nb}\, F$ von Y. Dann gibt es $x \in X$ und $y \in Y$ mit $\mathrm{vb}\, F = {}_{<}x$ und $\mathrm{nb}\, F = {}_{<}y$. Insbesondere ist ${}_{<}x \cong {}_{<}y$ und damit $(x, y) \in F$. Ein Widerspruch.

Es bleiben also folgende Fälle übrig:

1. $\mathrm{vb}\, F = X$ und $\mathrm{nb}\, F = Y$.
2. $\mathrm{vb}\, F = X$ und $\mathrm{nb}\, F$ ist echtes Anfangsstück von Y.
3. $\mathrm{vb}\, F$ ist echtes Anfangsstück von X und $\mathrm{nb}\, F = Y$.

Das zeigt den Satz. □

Übung 6.1. *Zeige, dass je zwei wohlgeordnete echte Klassen isomorph sind.*

Übung 6.2. *Gegeben sei eine Klasse X, deren Elemente wohlgeordnete Mengen $(x, <)$ sind. X habe die Eigenschaft, dass keine zwei verschiedenen Elemente von X als wohlgeordnete Mengen isomorph sind. Wir definieren eine Relation $\sqsubset$ auf X wie folgt:*

Für $(x, <), (y, <) \in X$ gelte $(x, <) \sqsubset (y, <)$ genau dann, wenn $(x, <)$ zu einem echten Anfangsstück von $(y, <)$ isomorph ist. Man zeige, dass $(X, \sqsubset)$ eine wohlgeordnete Klasse ist.

7. Induktive Beweise und rekursive Definitionen

Ähnlich wie bei den natürlichen Zahlen kann man auf wohlgeordneten Klassen induktive Beweise führen und Funktionen rekursiv definieren.

Satz 7.1. *Sei $(X, <)$ wohlgeordnete Klasse und E eine Eigenschaft von Mengen. Für alle $x \in X$ gelte:*

($*$) *Haben alle $y < x$ die Eigenschaft E, so auch x.*

Dann haben alle Elemente von X die Eigenschaft E.

Beweis. Setze

$$C := \{x \in X : x \text{ hat nicht die Eigenschaft } E\}.$$

Angenommen, $C \neq \emptyset$. Sei $x := \min C$. Nach ($*$) müsste x die Eigenschaft E haben. Ein Widerspruch. □

Häufig wird auch die folgende Variante von Satz 7.1 benutzt:

Satz 7.2. *Sei $(X, <)$ eine wohlgeordnete Klasse und E eine Eigenschaft von Mengen. Es gelte:*

1. *Das kleinste Element von X hat die Eigenschaft E.*
2. *Hat $x \in X$ die Eigenschaft E und ist x nicht das größte Element von X, so hat auch der Nachfolger x' von x die Eigenschaft E.*
3. *Ist $x \in X$ Limespunkt und haben alle $y < x$ die Eigenschaft E, so hat auch x die Eigenschaft E.*

Dann haben alle Elemente von X die Eigenschaft E.

Beweis. Wie im Beweis von Satz 7.1 sei

$$C := \{x \in X : x \text{ hat nicht die Eigenschaft } E\}.$$

Angenommen $C \neq \emptyset$. Sei $x := \min C$. Wegen (1) kann x nicht das kleinste Element von X sein. Wegen (2) kann x nicht Nachfolger eines Elementes von X sein. Nach (3) kann x auch kein Limespunkt von X sein. Ein Widerspruch. □

Als nächstes beweisen wir den sogenannten Rekursionssatz, der besagt, dass man auf Wohlordnungen Funktionen rekursiv definieren kann.

Satz 7.3 (Rekursionssatz)**.** *Sei $(X, <)$ eine wohlgeordnete Klasse. Weiter sei $G : V \to V$ eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion $F : X \to V$, so dass für jedes $x \in X$ gilt:*

$$F(x) = G(F \restriction_{<x})$$

G ist dabei zu verstehen als die Rekursionsvorschrift, die F definiert.

Bevor wir den Rekursionssatz beweisen, machen wir ein paar Bemerkungen über Vereinigungen von Funktionen und Relationen. Sei F eine Funktion und $G \subseteq F$. Dann ist auch G eine Funktion. Man sagt, F ist eine *Fortsetzung* von G.

Sei $\mathcal{R}$ eine Klasse, deren Elemente Relationen sind. Dann ist auch $\bigcup \mathcal{R}$ eine Relation und es gilt

$$\mathrm{vb}(\bigcup \mathcal{R}) = \bigcup \{\mathrm{vb}\, r : r \in \mathcal{R}\}$$

sowie

$$\mathrm{nb}(\bigcup \mathcal{R}) = \bigcup \{\mathrm{nb}\, r : r \in \mathcal{R}\}$$

Ist $\mathcal{F}$ eine Klasse von Funktionen, so ist $\bigcup \mathcal{F}$ im Allgemeinen keine Funktion.

Lemma 7.4. *Sei $\mathcal{F}$ eine Klasse von Funktionen. $\bigcup \mathcal{F}$ ist genau dann eine Funktion, wenn die Elemente von $\mathcal{F}$ paarweise* verträglich *sind, d.h., wenn für je zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{F}$ und alle $x \in \mathrm{vb}\, f \cap \mathrm{vb}\, g$ gilt: $f(x) = g(x)$.*

Beweis. Angenommen, $\bigcup \mathcal{F}$ ist eine Funktion. Seien $f, g \in \mathcal{F}$. Ist $x \in \mathrm{vb}\, f \cap \mathrm{vb}\, g$, so ist $x \in \mathrm{vb}(\bigcup \mathcal{F})$. Es gilt $f(x) = (\bigcup \mathcal{F})(x) = g(x)$. Damit sind f und g verträglich.

Seien nun die Elemente von $\mathcal{F}$ paarweise verträglich. Wir zeigen, dass $\bigcup \mathcal{F}$ eine Funktion ist. Seien $(x, y), (x, z) \in \bigcup \mathcal{F}$. Dann existieren $f, g \in \mathcal{F}$ mit $f(x) = y$ und $g(x) = z$. Da f und g verträglich sind, gilt $y = z$. Das zeigt, dass $\bigcup \mathcal{F}$ eine Funktion ist. □

Beweis des Rekursionssatzes. Sei

$$\mathcal{F} := \{f : X \xrightarrow{aus} V : f \text{ ist Menge, } \mathrm{vb}\, f \text{ ist Anfangsstück von } X \text{ und für alle } x \in \mathrm{vb}\, f \text{ gilt } f(x) = G(f \restriction {<}x)\}.$$

Wenn X nicht leer ist, so ist auch $\mathcal{F}$ nicht leer. Sei nämlich $x := \min X$. Dann ist $\{(x, G(\emptyset))\} \in \mathcal{F}$.

Wir zeigen, dass je zwei Elemente von $\mathcal{F}$ verträglich sind. Seien $f, g \in \mathcal{F}$. Angenommen f und g sind nicht verträglich. Sei $x \in (\mathrm{vb}\, f) \cap (\mathrm{vb}\, g)$ minimal mit $f(x) \neq g(x)$. Nach Wahl von x gilt $f \restriction {<}x = g \restriction {<}x$. Nach Definition von $\mathcal{F}$ ist

$$f(x) = G(f \restriction {<}x) = G(g \restriction {<}x) = g(x).$$

Ein Widerspruch zur Wahl von x.

Damit ist $F := \bigcup \mathcal{F} : X \xrightarrow{aus} V$ eine Funktion. Wegen

$$\mathrm{vb}\, F = \bigcup \{\mathrm{vb}\, f : f \in \mathcal{F}\}$$

ist $\mathrm{vb}\, F$ eine Vereinigung von Anfangsstücken von X. Wie man leicht sieht, ist $\mathrm{vb}\, F$ damit selbst ein Anfangsstück von X.

Als nächstes zeigen wir, dass für alle $x \in \mathrm{vb}\, F$ gilt:

$$F(x) = G(F \restriction {<}x).$$

Sei $x \in \mathrm{vb}\, F$. Dann existiert $f \in \mathcal{F}$ mit $x \in \mathrm{vb}\, f$. Wegen $f \subseteq F$ und da $\mathrm{vb}\, f$ und $\mathrm{vb}\, F$ Anfangsstücke von X sind, gilt $f \restriction {<}x = F \restriction {<}x$. Wegen $f \in \mathcal{F}$ gilt $F(x) = f(x) = G(f \restriction {<}x) = G(F \restriction {<}x)$.

Weiter müssen wir zeigen, dass $\mathrm{vb}\, F = X$ gilt. Dazu zeigen wir induktiv für alle $x \in X$: $x \in \mathrm{vb}\, F$. Sei $x \in X$ und für alle $y < x$ gelte $y \in \mathrm{vb}\, F$. Dann ist ${<}x \subseteq \mathrm{vb}\, F$. Da ${<}x$ eine Menge ist, ist auch $f := F \restriction {<}x$ eine Menge. Nachdem was wir bereits über F wissen, gilt $f \in \mathcal{F}$. Wie man leicht sieht, ist auch $g := f \cup \{(x, G(f)\}$ ein Element von $\mathcal{F}$. (Man beachte, dass $f \restriction {<}x = f$ gilt.) Damit ist $x \in \mathrm{vb}\, F$.

Das zeigt die Existenz einer Funktion $F : X \to V$ mit den gewünschten Eigenschaft. Sei F' eine weitere solche Funktion. Wir zeigen $F = F'$.

Sei $x \in X$. Setze $a := {<}x \cup \{x\}$. Wie man leicht sieht, ist a Anfangsstück von X und Menge. Setze $f := F \restriction a$ und $f' := F' \restriction a$. Wegen der Eigenschaften von F und F' sind f und f' Elemente von $\mathcal{F}$ und als solche verträglich. Damit gilt

$$F(x) = f(x) = f'(x) = F'(x).$$

□

Analog zu Satz 7.2 gibt es auch eine Version des Rekursionssatzes, in der Limesschritt und Nachfolgerschritt getrennt sind.

Satz 7.5. *Sei $(X, <)$ wohlgeordnete Klasse. H und K seien Funktionen von V nach V. a sei eine Menge. Dann gibt es genau eine Funktion $F : X \to V$, so dass für jedes $x \in X$ gilt:*

$$(**) \quad F(x) = \begin{cases} a, \text{ falls } x \text{ das kleinste Element von } X \text{ ist,} \\ H(F(y)), \text{ falls } y \in X \text{ und } x = y' \text{ gilt,} \\ K(F \restriction_{<} x), \text{ falls } x \text{ Limespunkt von } X \text{ ist.} \end{cases}$$

Beweis. Wir definieren eine Funktion $G : V \to V$ wie folgt: für jedes $f \in V$ sei

$$G(f) := \begin{cases} \emptyset, \text{ falls } f \text{ keine Funktion ist oder vb } f \text{ kein Anfangsstück von } X, \\ a, \text{ falls } f \text{ die leere Funktion ist, also falls } f = \emptyset \text{ gilt,} \\ H(f(y)), \text{ falls } f \text{ Funktion ist und vb } f = \{x \in X : x \leq y\} \text{ gilt,} \\ K(f), \text{ falls vb } f \neq \emptyset \text{ Anfangsstück von } X \text{ ohne größtes Element ist.} \end{cases}$$

Nach dem Rekursionssatz existiert ein Funktion $F : X \to V$, so dass für jedes $x \in X$ gilt:

$$F(x) = G(F \restriction_{<} x)$$

Wir zeigen, dass F die Bedingung $(**)$ erfüllt. Dazu benutzen wir Satz 7.2. Sei $x \in X$. Ist x das kleinste Element von X, so gilt $F \restriction_{<} x = \emptyset$. Damit ist $G(F \restriction_{<} x) = G(\emptyset) = a$, wie in $(**)$ gefordert.

Ist $x = y'$ für ein $y \in X$, so gilt

$$F(x) = G(F \restriction_{<} x) = H(F \restriction_{<} x(y)) = H(F(y)).$$

Sei schließlich x ein Limespunkt von X. Dann ist

$$F(x) = G(F \restriction_{<} x) = K(F \restriction_{<} x).$$

Insgesamt erfüllt F die Bedingung $(**)$.

Es bleibt zu zeigen, dass F eindeutig bestimmt ist. Sei F' eine weitere Funktion, die $(**)$ erfüllt. Wir benutzen wieder Satz 7.2, um $F = F'$ zu beweisen.

Sei $x \in X$. Ist $x = \min X$, so gilt $F(x) = a = F'(x)$. Ist $x = y'$ für ein $y \in X$ mit $F(y) = F'(y)$, so gilt

$$F(x) = H(F(y)) = H(F'(y)) = F'(x).$$

Ist x Limespunkt von X und gilt für alle $y < x$ die Gleichung $F(y) = F'(y)$, so gilt

$$F(x) = K(F \restriction_{<} x) = K(F' \restriction_{<} x) = F'(x).$$

Das zeigt $F = F'$. □

Übung 7.1. *Man gebe eine geeignete Funktion $G : V \to V$ an, so dass die Funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die der Rekursion $F(n) = G(F \restriction n)$ genügt, genau die Funktion $n \mapsto n!$ ist.*

Definition 7.6. Eine Klasse C heißt transitiv, falls aus $y \in C$ und $x \in y$ stets $x \in C$ folgt. Anders gesagt, C ist transitiv, wenn gilt:

$$\forall y \in C \forall x (x \in y \Rightarrow x \in C)$$

Beispiele transitiver Mengen sind $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ und $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. $\{\{\emptyset\}\}$ ist nicht transitiv. Ist C eine transitive Klasse, $n \in \mathbb{N}$ und gilt $x_n \in x_{n-1} \in \cdots \in x_0 \in C$, so gilt für alle $i \in \{0, \dots, n\}$: $x_i \in C$.

Lemma 7.7. *Sei C eine Klasse. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *C ist transitiv.*
(2) *$\forall y \in C (y \subseteq C)$*
(3) *$\bigcup C \subseteq C$*
(4) *$C \subseteq \mathcal{P}(C)$*

Übung 7.2. *Zeige:*

a) Sei C eine Klasse transitiver Mengen. Dann sind auch $\bigcup C$ und $\bigcap C$ transitiv.
b) Ist a eine transitive Menge, so sind auch $a \cup \{a\}$ und $\mathcal{P}(a)$ transitiv.
c) Jede natürliche Zahl ist transitiv.

Im Folgenden werden wir Strukturen der Form $(C, \in \cap (C \times C))$ betrachten. Der Einfachheit halber schreiben wir anstelle von $(C, \in \cap (C \times C))$ oder $(C, \in \restriction C)$ aber nur $(C, \in)$.

Satz 7.8 (Mostowskischer Isomorphiesatz für wohlgeordnete Klassen)**.** *Sei $(X, <)$ eine wohlgeordnete Klasse. Dann gibt es eine transitive Klasse T und einen Isomorphismus*

$$\pi : (X, <) \to (T, \in)$$

Insbesondere ist T durch $\in \restriction T$ wohlgeordnet. T und π sind dabei eindeutig bestimmt. T heißt das Mostowski-Bild *von X, π der* Mostowki-Isomorphismus*. Oft nennt man sowohl T als auch π auch den* Mostowski-Kollaps *von X.*

Beweis. Mit Hilfe des Rekursionssatzes definieren wir π durch

$$\pi(x) := \{\pi(y) : y \in X \wedge y < x\} \quad (= \pi[{<}x]).$$

(Genauer: sei $G : V \to V$ definiert durch

$$G(f) := \begin{cases} \text{nb}\, f, \text{ falls } f \text{ Funktion ist,} \\ \emptyset, \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Funktion $\pi : X \to V$ ist dann die eindeutig bestimmte Funktion, für die für alle $x \in X$ gilt: $\pi(x) = G(\pi \restriction {<}x)$.) Wir setzen $T := \pi[X]$. Damit ist π automatisch surjektiv.

Wir zeigen als nächstes, dass π injektiv ist. Angenommen nicht. Wähle $x_2 \in X$ minimal mit der Eigenschaft, dass es ein $x_1 < x_2$ gibt, so dass $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ gilt. Es gilt dann

$$\{\pi(z_1) : z_1 < x_1\} = \pi(x_1) = \pi(x_2) = \{\pi(z_2) : z_2 < x_2\}.$$

Für $z_2 := x_1$ folgt daraus $\pi(z_2) = \pi(z_1)$ für ein $z_1 < x_1$. Es gilt also $z_1 < z_2 < x_2$ und $\pi(z_1) = \pi(z_2)$, ein Widerspruch zur Minimalität von x_2.

Nun kann man leicht sehen, dass π ein Isomorphismus ist. Seien nämlich $x, y \in X$ mit $x < y$. Dann gilt

$$\pi(x) \in \{\pi(z) : z \in X \wedge z < y\} = \pi[{<}y] = \pi(y).$$

Seien nun $x, y \in X$ mit $\pi(x) \in \pi(y)$. Dann ist $\pi(x) \in \pi[{<}y]$ und damit $\pi(x) = \pi(z)$ für ein $z < y$. Da π injektiv ist, gilt $x = z$ und damit $x < y$.

Es bleibt die Eindeutigkeit von π nachzuweisen. Sei $\rho : (X, <) \to (S, \in)$ ein weiterer Isomorphismus mit transitivem S. Wir zeigen $\pi = \rho$ (und damit $T = \pi[X] = \rho[X] = S$).

Sei $\rho(y) = \pi(y)$ für alle $y < x$. Dann gilt

$$\rho(x) = \{s : s \in \rho(x)\} = \{s \in S : s \in \rho(x)\},$$

da S transitiv ist. Wegen $S = \rho[X]$ und da ρ ein Isomorphismus ist, gilt

$$\{s \in S : s \in \rho(x)\} = \{\rho(y) : y \in X \wedge \rho(y) \in \rho(x)\} = \{\rho(y) : y < x\}.$$

Da ρ und π auf ${<}x$ übereinstimmen, ergibt sich

$$\{\rho(y) : y < x\} = \{\pi(y) : y < x\} = \pi(x).$$

□

Ist $(X, <)$ eine wohlgeordnete Klasse, $x \in X$ nicht das letzte Element von X und $\pi : (X, <) \to (T, \in)$ der Mostowski-Isomorphismus, so ist $\pi(x') = \pi(x) \cup \{\pi(x)\}$. Man erinnere sich an die Definition der natürlichen Zahlen!

Korollar 7.9. *Isomorphe Wohlordnungen haben die gleichen Mostowski-Bilder.*

Beweis. Seien $(X, <)$ und $(Y, <)$ isomorphe wohlgeordnete Klassen und $\pi_X : X \to T$ und $\pi_Y : Y \to S$ die zugehörigen Mostowski-Isomorphismen. Weiter sei $f : X \to Y$ ein Isomorphismus. Dann ist $\pi_Y \circ f : X \to S$ ein Isomorphismus in eine transitive Klasse. Wegen der Eindeutigkeit des Mostowski-Isomorphismus' ist $\pi_Y \circ f = \pi_X$ und damit $S = T$. □

Lemma 7.10. *Sei $(X, <)$ wohlgeordnet und Y ein Anfangsstück von X. Weiter seien $\pi_X : (X, <) \to (T, \in)$ und $\pi_Y : (Y, <) \to (S, \in)$ die zugehörigen Mostowski-Isomorphismen. Dann ist $\pi_Y = \pi_X \restriction Y$. Insbesondere ist $(S, \in)$ ein Anfangstück von $(T, \in)$.*

Beweis. Man zeigt für $y \in Y$ induktiv $\pi_X(y) = \pi_Y(y)$. Angenommen, $\pi_Y \restriction {<}y = \pi_X \restriction {<}y$. Dann ist

$$\begin{aligned}\pi_Y(y) = \{\pi_Y(z) : z \in Y \wedge z < y\} = \{\pi_X(z) : z \in Y \wedge z < y\} \\ = \{\pi_X(z) : z < y\} = \pi_X(y)\end{aligned}$$

Dabei gilt das vorletzte Gleichheitszeichen, weil Y ein Anfangsstück von X ist. □

Korollar 7.11. *Ist $(X, <)$ wohlgeordnet und $(Y, <)$ isomorph zu einem Anfangsstück von X, dann ist das Mostowski-Bild von Y ein Anfangsstück des Mostowski-Bildes von X.*

Beweis. Sei $(Z, <)$ ein Anfangsstück von $(X, <)$ und $f : (Y, <) \to (Z, <)$ ein Isomorphismus. Nach Lemma 7.10 ist das Mostowski-Bild von Z ein Anfangsstück des Mostowski-Bildes von X. Nach Korollar 7.9 haben Y und Z dasselbe Mostowski-Bild. □

Definition 7.12. Sei $(x, <)$ eine wohlgeordnete Menge. Dann heißt das Mostowski-Bild von $(x, <)$ der *Ordnungstyp* von $(x, <)$ und wird mit $\mathrm{otp}(x, <)$ bezeichnet.

8. Ordinalzahlen

Definition 8.1. Eine *Ordinalzahl* ist eine transitive Menge, die durch $\in$ wohlgeordnet wird. Ord ist die Klasse aller Ordinalzahlen. Für $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ sei

$$\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \beta.$$

Zum Beispiel sind alle natürlichen Zahlen Ordinalzahlen. Allgemein ist jedes Mostowski-Bild einer wohlgeordneten Menge ist eine Ordinalzahl.

Lemma 8.2. *Ordinalzahlen sind genau die Mostowski-Bilder von wohlgeordneten Mengen.*

Beweis. Sei α eine Ordinalzahl, T das Mostowski-Bild von $(\alpha, \in)$. Da α bereits transitiv ist und wegen der Eindeutigkeit des Mostowski-Bildes, ist $T = \alpha$. Die Ordinalzahl α ist also Mostowski-Bild einer Wohlordnung, nämlich der Wohlordnung $(\alpha, \in)$.

Umgekehrt ist jedes Mostowski-Bild einer wohlgeordneten Menge eine transitive Menge, die durch $\in$ wohlgeordnet ist, und damit Ordinalzahl. □

Lemma 8.3. *a)* Ord *ist eine transitive Klasse. D.h., die Elemente von Ordinalzahlen sind wieder Ordinalzahlen.*

b) Für jede Ordinalzahl α gilt $\alpha = \{\beta \in \mathrm{Ord} : \beta < \alpha\}$.

c) Für $\alpha, \beta \in$ Ord gilt $\alpha = \beta$ oder $\alpha \subsetneqq \beta$ oder $\alpha \supsetneqq \beta$.

d) Für $\alpha, \beta \in$ Ord gilt: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta \Leftrightarrow \alpha \subsetneqq \beta$

Beweis. a) Sei α eine Ordinalzahl und $z \in \alpha$. Nach Lemma 8.2 ist α Mostowski-Bild einer Wohlordnung $(X, <)$. Sei $\pi : X \to \alpha$ der Mostowski-Isomorphismus. Dann existiert $x \in X$ mit $z = \pi(x) = \pi[{}_<x]$. Die Menge $\pi[{}_<x]$ ist aber genau das Mostowski-Bild der Wohlordnung $({}_<x, <)$. Damit ist z Ordinalzahl.

b) Sei α eine Ordinalzahl. Nach a) sind alle Elemente von α ebenfalls Ordinalzahlen. Nach Definition der Relation $<$ auf den Ordinalzahlen ist

$$\alpha = \{\beta \in \mathrm{Ord} : \beta \in \alpha\} = \{\beta \in \mathrm{Ord} : \beta < \alpha\}.$$

c) Seien $\alpha, \beta \in$ Ord. Dann existieren Wohlordnungen $(X, <)$ und $(Y, <)$ und Isomorphismen $\pi_X : X \to \alpha$ und $\pi_Y : Y \to \beta$. Nach Satz 6.8 sind X und Y isomorph oder eine der beiden Wohlordnungen ist zu einem echten Anfangsstück der anderen isomorph. Im ersten Fall gilt $\alpha = \beta$ nach Korollar 7.9. Im zweiten Falle nehmen wir zunächst an, dass X zu einem echten Anfangsstück von Y isomorph ist. Nach Korollar 7.11 ist α dann ein echtes Anfangsstück von β. Es gilt also $\alpha \subsetneqq \beta$.

Analog gilt $\beta \subsetneqq \alpha$, falls Y zu einem echten Anfangsstück von X isomorph ist.

d) Die erste Äquivalenz ist die Definition von $<$. Für die zweite Äquivalenz sei $\alpha \in \beta$. Da β transitiv ist, gilt $\alpha \subseteq \beta$. Wäre $\alpha = \beta$, so folgte $\alpha \in \alpha$. Wir zeigen, dass das nicht sein kann.

Sei $(X, <)$ Wohlordnung, deren Mostowski-Bild α ist. Sei $\pi : X \to \alpha$ der Mostowski-Isomorphismus. Wegen $\alpha \in \alpha$ existiert $x \in X$ mit $\alpha = \pi(x) = \pi[{}_<x]$. Wegen $x \notin {}_<x$ ist ${}_<x \neq X$. Da π bijektiv ist, folgt

$$\alpha = \pi[X] \neq \pi[{}_<x] = \pi(x) = \alpha,$$

ein Widerspruch.

Sei nun $\alpha \subsetneqq \beta$. Als transitive Menge ist α ein Anfangsstück von β. Sei $(X, <)$ Wohlordnung und $\pi : X \to \beta$ Isomorphismus. Die Menge $\pi^{-1}[\alpha]$ ist ein echtes Anfangsstück von X. Wähle $x \in X$ mit ${}_<x = \pi^{-1}[\alpha]$. Dann gilt $\alpha = \pi[{}_<x] = \pi(x) \in \beta$. □

Lemma 8.4. *a) Die Relation $<$ ist Wohlordnung auf* Ord.

b) $0 = \emptyset = \min \mathrm{Ord}$ und für jede Ordinalzahl α ist $\alpha' = \alpha \cup \{\alpha\}$.

c) Ist M eine Menge von Ordinalzahlen, so ist $\bigcup M \in \mathrm{Ord}$. $\bigcup M$ ist das Supremum von M in Ord. *Wir bezeichnen diese Ordinalzahl daher auch mit* $\sup M$.

d) Ord *ist echte Klasse.*

Beweis. a) Nach Lemma 8.3 d) ist die Relation $<$ irreflexiv und transitiv auf Ord. Nach Lemma 8.3 c) ist $<$ total.

Sei nun $C \subseteq \mathrm{Ord}$ mit $C \neq \emptyset$. Dann ist $\alpha := \bigcap C$ eine Menge. Da alle $\gamma \in C$ transitiv sind, ist auch α transitiv. Für beliebiges $\gamma \in C$ ist $\alpha \subseteq \gamma$ und damit durch $\in$ wohlgeordnet. Es folgt, dass α Ordinalzahl ist. Für alle $\gamma \in C$ ist $\alpha \subseteq \gamma$ und damit $\alpha \leq \gamma$.

Um zu zeigen, dass α das kleinste Element von C ist, müssen wir nur noch $\alpha \in C$ zeigen. Angenommen, das ist nicht der Fall.

Dann gilt $\alpha < \gamma$ für alle $\gamma \in C$. Wegen $<=\in \cap(\mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord})$ folgt $\alpha \in \bigcap C$, also $\alpha < \alpha$. Das ist aber ein Widerspruch zu Lemma 8.3 d).

b) $\emptyset = \min \mathrm{Ord}$ folgt sofort aus Lemma 8.3 d). Sei $\alpha \in \mathrm{Ord}$. Da $\alpha \cup \{\alpha\}$ eine transitive Menge ist, die durch $\in$ wohlgeordnet ist, existiert eine Ordinalzahl, die größer als α ist. Insbesondere existiert α'. Es gilt

$$\alpha' = \{\beta \in \mathrm{Ord} : \beta < \alpha'\} = \{\beta \in \mathrm{Ord} : \beta \leq \alpha\} = \alpha \cup \{\alpha\}.$$

c) Sei M eine Menge von Ordinalzahlen. Dann ist $\bigcup M$ eine Menge nach (Ver) und als Vereinigung einer Menge transitiver Mengen auch transitiv. Wegen der Transitivität von Ord ist $\bigcup M \subseteq \mathrm{Ord}$ und damit, nach a), durch $\in$ wohlgeordnet. Also ist $\bigcup M$ eine Ordinalzahl.

Offenbar gilt $\alpha \subseteq \bigcup M$ und damit $\alpha \leq \bigcup M$ für alle $\alpha \in M$. Damit ist $\bigcup M$ eine obere Schranke von M. Sei $\alpha \in \mathrm{Ord}$ eine weitere obere Schranke von M. Wir zeigen $\bigcup M \subseteq \alpha$.

Sei $\beta \in \bigcup M$. Dann existiert $\gamma \in M$ mit $\beta \in \gamma$, also mit $\beta < \gamma$. Es gilt $\gamma \leq \alpha$, da α obere Schranke von M ist. Also ist $\beta < \alpha$ und damit $\beta \in \alpha$.

Das zeigt $\bigcup M \leq \alpha$. Damit ist $\bigcup M$ das (in einer linearen Ordnung eindeutige) Supremum von M.

d) Angenommen, Ord ist Menge. Dann ist $\alpha := \bigcup \mathrm{Ord}$ eine Ordinalzahl, und zwar die größte. Aber $\alpha \cup \{\alpha\}$ ist eine größere Ordinalzahl. Ein Widerspruch. □

Für zwei Ordinalzahlen α und β kann man rekursiv das Produkt $\alpha \cdot \beta$ und die Summe $\alpha + \beta$ definieren. In dieser Rekursion unterscheiden wir Limesschritte und Nachfolgerschritte. Den Nachfolger einer Ordinalzahl α schreiben wir als α'.

Definition 8.5. a) Eine Ordinalzahl α ist eine *Nachfolgerordinalzahl*, wenn es eine Ordinalzahl $\beta < \alpha$ mit $\alpha = \beta'$ gibt. Eine Ordinalzahl $\alpha > 0$, die keine Nachfolgerordinalzahl ist, heißt *Limesordinalzahl*.

b) Für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ setzt man $\alpha + 0 := \alpha$ und $\alpha + \beta' := (\alpha + \beta)'$. Ist β eine Limesordinalzahl, so definiert man $\alpha + \beta := \sup\{\alpha + \gamma : \gamma < \beta\}$.

c) Für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ setzt man $\alpha \cdot 0 := 0$ und $\alpha \cdot \beta' := (\alpha \cdot \beta) + \alpha$. Ist β eine Limesordinalzahl, so definiert man $\alpha \cdot \beta := \sup\{\alpha \cdot \gamma : \gamma < \beta\}$.

Übung 8.1. *Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Ord}$. Zeige mittels transfiniter Induktion:*
a) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$
b) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$
c) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$

Definition 8.6. Seien $(X, <)$ und $(Y, <)$ linear geordnete Mengen. Die *Summe* von X und Y sei die lineare Ordnung $(X \times \{0\} \cup Y \times \{1\}, R)$, wobei die Relation R wie folgt definiert ist:

Für $x_0, x_1 \in X$ sei $((x_0, 0), (x_1, 0)) \in R$, falls $x_0 < x_1$ gilt. Für $x \in X$ und $y \in Y$ sei $((x, 0), (y, 1)) \in R$. Für $y_0, y_1 \in Y$ sei $((y_0, 1), (y_1, 1)) \in R$, falls $y_0 < y_1$ gilt.

Die *lexikographische* Ordnung $<_{lex}$ auf dem Produkt $X \times Y$ wird wie folgt definiert:

Für $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \in X \times Y$ sei $(x_0, y_0) <_{lex} (x_1, y_1)$ genau dann, wenn entweder $x_0 < x_1$ gilt oder wenn $x_0 = x_1$ ist und $y_0 < y_1$ gilt.

Die lineare Ordnung $(X \times Y, <_{lex})$ ist das *lexikographische Produkt* von $(X, <)$ und $(Y, <)$.

Übung 8.2. *a) Zeige, dass das lexikographische Produkt zweier wohlgeordneter Mengen wieder wohlgeordnet ist.*

b) Seien α und β Ordinalzahlen. Zeige, dass $\alpha + \beta$ der Ordnungstyp der Summe von $(\alpha, \in)$ und $(\beta, \in)$ und $\alpha \cdot \beta$ der Ordnungstyp des lexikographischen Produkts von $(\beta, \in)$ und $(\alpha, \in)$ ist.

Man beachte, dass auf den Ordinalzahlen weder Produkt noch Summe kommutativ sind. Sei nämlich ω die kleinste Limesordinalzahl (deren Existenz wir im nächsten Abschnitt aus einem weiteren Axiom folgern werden). Dann gilt

$$\omega + 1 \neq \omega = 1 + \omega$$

sowie

$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega \neq \omega = 2 \cdot \omega.$$

Wir werden im Rest der Vorlesung nicht wieder auf diese *Ordinalzahlarithmetik* zurückkommen. Dafür werden wir intensiv *Kardinalzahlarithmetik* betreiben, die deutlich wichtiger ist, als das Rechnen mit Ordinalzahlen.

9. Die natürlichen Zahlen und das Unendlichkeitsaxiom

Wir definieren zunächst die natürlichen Zahlen als spezielle Ordinalzahlen. Diese Definition wird dem, was wir bisher über die natürlichen Zahlen gesagt haben, nicht widersprechen.

Definition 9.1. Eine Ordinalzahl n heißt *natürliche Zahl*, falls keine Limesordinalzahl $\alpha \leq n$ existiert. $\mathbb{N}$ sei die Klasse der natürlichen Zahlen. Die Operation $'$ bezeichnet wieder die Nachfolgeroperation auf den Ordinalzahlen. Im Zusammenhang mit $\mathbb{N}$ meinen wir mit $'$ meist die auf $\mathbb{N}$ eingeschränkte Nachfolgeroperation.

Bevor wir ein neues Axiom, das *Unendlichkeitsaxiom*, einführen, welches garantiert, dass die Klasse $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen überhaupt eine Menge ist, rechnen wir nach, dass die Struktur $(\mathbb{N}, 0, ')$ die folgenden *Peano-Axiome* erfüllt.

(P1) 0 ist eine natürliche Zahl.
(P2) Mit jeder natürlichen Zahl n ist auch n' eine natürliche Zahl.
(P3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $n' \neq 0$.
(P4) Sind m und n verschiedene natürliche Zahlen, so sind auch m' und n' verschieden.
(P5) Ist $C \subseteq \mathbb{N}$ eine Klasse mit $0 \in C$ und $n' \in C$ für alle $n \in C$, so gilt $C = \mathbb{N}$.

Satz 9.2. $(\mathbb{N}, 0, ')$ *erfüllt* (P1)–(P5).

Beweis. (P1) ist klar. Ist n eine natürliche Zahl, so gibt es keine Limesordinalzahl $\alpha \leq n$. Da n' keine Limesordinalzahl ist, gibt es damit auch keine Limesordinalzahl $\alpha \leq n'$. Das zeigt (P2).

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n' = n \cup \{n\} \neq \emptyset = 0$. Das zeigt (P3).

Seien nun $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \neq m$. O.B.d.A. sei $m < n$. Dann ist $m' \leq n < n'$ und damit $m' \neq n'$. Das zeigt (P4).

Sei schließlich $C \subseteq \mathbb{N}$ mit $0 \in C$ und $n' \in C$ für alle $n \in C$. Angenommen, $C \neq \mathbb{N}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ minimal mit $n \notin C$. Wegen $0 \in C$ gilt $0 < n$. Da n keine Limesordinalzahl ist, existiert eine Ordinalzahl m mit $m' = n$. Mit n ist auch m eine natürliche Zahl. (Die natürlichen Zahlen bilden also ein Anfangsstück von Ord).

Wegen der Minimalität von n ist $m \in C$. Damit ist auch $n = m' \in C$, ein Widerspruch. Das zeigt (P5). □

Die ZF-Axiome, die bisher eingeführt wurden, garantieren noch nicht, dass es eine im intuitiven Sinne unendliche Menge gibt. Das Unendlichkeitsaxiom beseitigt dieses Problem.

Definition 9.3. Eine Klasse C heißt *induktiv*, wenn $\emptyset \in C$ gilt und für alle $x \in C$ auch $x \cup \{x\} \in C$ ist.

Wir wissen bereits, dass Ord und $\mathbb{N}$ induktive Klassen sind. (Wir wissen aber nicht, dass Ord $\neq \mathbb{N}$ gilt.) Offenbar ist auch V eine induktive Klasse.

Für jede induktive Klasse D ist $\mathbb{N} \subseteq D$. Sei nämlich $C := \mathbb{N} \cap D$. Wie man leicht sieht, ist auch C induktiv. (Allgemein ist der Durchschnitt zweier induktiver Klassen wieder induktiv.) Nach (P5) ist $C = \mathbb{N}$.

(Un) Unendlichkeitsaxiom. Es gibt eine induktive Menge.

Korollar 9.4. $\mathbb{N}$ *ist eine Menge.*

Beweis. Sei D eine induktive Menge. Dann ist $\mathbb{N} \subseteq D$. Nach (Aus) ist $\mathbb{N}$ Menge. □

Da Ord eine echte Klasse ist, ist $\mathbb{N}$ ein echtes Anfangsstück von Ord. Das rechtfertigt die folgende Definition.

Definition 9.5. $\omega := \min(\mathrm{Ord} \setminus \mathbb{N})$

Offenbar gilt $\omega = \mathbb{N}$. Außerdem ist ω die kleinste Limesordinalzahl.

Übung 9.1. *Eine Klasse X heiße* schwach induktiv*, wenn sie nicht leer ist und für alle $x \in X$ die Menge $x \cup \{x\}$ ein Element von X ist. Zeige, dass es für jede schwach induktive Klasse X eine Injektion $e : \mathbb{N} \to X$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $e(n') = e(n) \cup \{e(n)\}$.*

Schließe daraus, dass aus der Existenz einer schwach induktiven Menge die Existenz einer induktiven Menge folgt. (Natürlich ohne Benutzung von (Un)*.)*

Durch diese Ubung ist die alternative Formulierung von (Un) am Anfang des Skripts gerechtfertigt.

Definition 9.6. Eine Menge x heißt *endlich*, wenn es eine natürliche Zahl n und eine Bijektion $f : n \to x$ gibt.

Offenbar ist jede natürliche Zahl endlich. Dass jede Ordinalzahl $> \omega$ unendlich ist, ist anschaulich klar, muss aber gezeigt werden.

Lemma 9.7. *Ist $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathrm{Ord}$ und $\alpha \neq n$, so gibt es keine Bijektion zwischen n und α. Insbesondere sind alle Ordinalzahlen $\alpha \geq \omega$ unendlich.*

Beweis. Wegen $\alpha \neq n$ können wir $n < \alpha$ annehmen.

Zunächst betrachten wir den Fall $\alpha \in \mathbb{N}$. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über n. Ist $n = 0$, also $n = \emptyset$, so gibt es keine Bijektion zwischen α und n, da $\alpha \neq \emptyset$.

Gelte nun die Behauptung für n und sei $n + 1 < \alpha$. Wegen $0 < n + 1 < \alpha$ und $\alpha \in \mathbb{N}$ ist α von der Form $m + 1$ für ein $m \in \mathbb{N}$.

Angenommen,

$$f : n + 1 \to \alpha = m + 1$$

ist bijektiv. Wir definieren $g : m + 1 \to m + 1$ wie folgt: Es sei $g(f(n)) := m$, $g(m) := f(n)$ und $g(x) := x$ für alle $x \in (m + 1) \setminus \{m, f(n)\}$. ($m$ und $f(n)$ werden durch g also vertauscht, wenn sie nicht gleich sind.) Die Funktion g und damit auch $h := g \circ f$ ist bijektiv.

Es gilt $h : n + 1 \to m + 1$ und $h(n) = g(f(n)) = m$. Setze $h_0 := h \restriction n$. Dann ist h_0 eine Bijektion zwischen n und m. Wegen $n + 1 < \alpha = m + 1$ ist $n < m$, ein Widerspruch zur Induktionsannahme.

Sei nun $\alpha \geq \omega$. Wir zeigen Folgendes durch Induktion über n: ist $f : n \to \alpha$ eine beliebige Funktion, so ist

$$s_f := \sup(f[n] \cap \omega) < \omega.$$

Insbesondere ist $s_f + 1 \in \omega \setminus f[n]$ und f damit nicht surjektiv.

Für $n = 0$ ist $s_f = \sup \emptyset = 0 < \omega$. Sei nun die Behauptung richtig für n, und sei $g : n + 1 \to \alpha$ eine beliebige Funktion. Setze $f := g \restriction n$. Nach Induktionsannahme ist $s_f < \omega$. Wegen $n + 1 = n \cup \{n\}$ ist

$$s_g = \begin{cases} s_f, & \text{falls } g(n) \leq s_f, \\ g(n), & \text{falls } s_f < g(n) < \omega, \\ s_f, & \text{falls } \omega \leq g(n). \end{cases}$$

In jedem Falle ist mit s_f auch $s_g < \omega$. □

Definition 9.8. Nach Lemma 9.7 ist für jede endliche Menge x die natürliche Zahl n, so dass es eine Bijektion zwischen x und n gibt, eindeutig bestimmt. Wir nennen n die *Kardinalzahl* bzw. die *Mächtigkeit* von x und schreiben $|x|$ für n.

Man kann Endlichkeit von Mengen auch definieren, ohne vorher die natürlichen Zahlen einzuführen. Zum Beispiel heißt eine Menge x *Dedekind-endlich* (*D-endlich*), wenn es keine Bijektion zwischen x und einer echten Teilmenge von x gibt. Hat man das Auswahlaxiom zur Verfügung, welches wir später noch ausführlich diskutieren

werden, so fallen diese verschiedenen Endlichkeitsbegriffe zusammen. Setzt man nur die Axiome von ZF voraus, so kann es durchaus D-endliche Mengen geben, die sich nicht bijektiv auf eine natürliche Zahl abbilden lassen.

10. Fundierte Relationen und das Fundierungsaxiom

Definition 10.1. Sei C eine Klasse und E eine Relation (nicht notwendiger Weise auf C). Ein Element $x \in C$ heißt *E-minimal* in C, falls es kein $y \in C$ mit yEx gibt.

Für jede Menge x sei $\mathrm{ext}_E(x) := \{y : yEx\}$ die *Extension* von x bzgl. E. Die Relation E heißt *extensional*, wenn für alle x, y gilt:

$$\mathrm{ext}_E(x) = \mathrm{ext}_E(y) \quad \Rightarrow \quad x = y$$

Ist $(X, <)$ eine Wohlordnung und $x \in X$, so ist $\mathrm{ext}_<(x) = {<}x$. Sei $E := \{(x, y) : x \in y\}$ die $\in$-Relation. Dann ist $\mathrm{ext}_E(x) = \{y : y \in x\} = x$ für alle x. Das Extensionalitätsaxiom besagt also genau, dass $\in$ extensional ist.

Definition 10.2. Eine Relation E auf X heißt *fundiert*, falls

(1) für jedes $x \in X$ die Extension $\mathrm{ext}_E(x)$ eine Menge ist (E ist *mengenartig*) und
(2) jede nichtleere Teilmenge von X ein E-minimales Element hat.

Zum Beispiel ist eine lineare Ordnung genau dann fundiert, wenn sie eine Wohlordnung ist.

Lemma 10.3. *Sei E eine fundierte Relation auf X. Dann gibt es keine Folge $(x_n)_{n\in\omega}$ in X mit $\ldots x_2 E x_1 E x_0$. Etwas formaler, es gibt keine Funktion $f : \omega \to X$ mit $f(n+1)Ef(n)$ für alle $n \in \omega$.*

Beweis. Angenommen doch. Sei $(x_n)_{n\in\omega}$ eine Folge in X mit $\ldots x_2 E x_1 E x_0$. Setze $a := \{x_n : n \in \omega\}$. Nach (Un) und (Ers) ist a eine Menge. Außerdem ist $a \neq \emptyset$. Aber offenbar hat a kein E-minimales Element. □

Korollar 10.4. *Ist E fundierte Relation auf X, so gibt es kein $x \in X$ mit xEx.*

Setzt man wieder das Auswahlaxiom voraus, so gilt auch die Umkehrung von Lemma 10.3.

Lemma 10.5. *Sei E fundierte Relation auf X und $C \subseteq X$ eine nichtleere Klasse. Dann hat C ein E-minimales Element.*

Beweis. Sei $c \in C$. Ist c bereits E-minimal in C, so sind wir fertig. Ist c nicht E-minimal, so definieren wir Mengen s_n, $n \in \omega$ wie folgt:

Setze $s_0 := \{c\}$. Weiter sei für jedes $n \in \omega$

$$s_{n+1} := \bigcup \{\mathrm{ext}_E(x) : x \in s_n\}.$$

Wegen der Mengenartigkeit von E und nach (Ver) und (Ers) sind die s_n Mengen.

Schließlich sei $t := \bigcup\{s_n : n \in \omega\}$. Nach (Un), (Ver) und (Ers) ist auch t eine Menge.

Setze $a := t \cap C$. Nach (Aus) ist a Menge. Wegen $c \in a$ ist $a \neq \emptyset$. Sei x ein E-minimales Element von a. Wir zeigen, dass x auch E-minimal in C ist.

Sei nämlich $y \in C$. Angenommen es gilt yEx. Wegen $x \in t$ existiert $n \in \omega$ mit $x \in s_n$. Es is $y \in \mathrm{ext}_E(x)$, also $y \in s_{n+1} \subseteq t$. Wegen $y \in C$ ist $y \in a$. Damit ist x nicht E-minimales Element von a, ein Widerspruch. □

Man beachte, dass der Beweis von Lemma 10.5 nur deshalb so viel aufwändiger ist, als der des entsprechenden Lemmas für Wohlordnungen, weil wir für fundierte Relationen nicht fordern, dass sie transitiv sind.

Wir haben transfinite Induktion und Rekursion bisher für Wohlordnungen eingeführt. Induktion und Rekursion funktionieren aber auch für fundierten Relationen.

Satz 10.6 (Transfinite Induktion für fundierte Relationen)**.** *Sei E eine fundierte Relation auf X und Φ eine Eigenschaft von Mengen. Für alle $x \in X$ gelte: haben alle $y \in X$ mit yEx die Eigenschaft Φ, so auch x. Dann haben alle Elemente von X die Eigenschaft E.*

Beweis. Angenommen nicht. Dann ist die Klasse

$$C := \{x \in X : x \text{ hat nicht die Eigenschaft } \Phi\}$$

nichtleer. Sei c eine E-minimales Element von C. Dann haben alle $y \in X$ mit yEc die Eigenschaft Φ. Nach Voraussetzung hat damit auch c die Eigenschaft Φ, ein Widerspruch. □

Satz 10.7 (Rekursionssatz für fundierte Relationen)**.** *Sei E eine fundierte Relation auf X. Weiter sei $G : X \times V \to V$ eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion $F : X \to V$, so dass für alle $x \in X$ gilt:*

$$F(x) = G(x, F \restriction \operatorname{ext}_E(x))$$

Beweis. Wir sagen, dass $Y \subseteq X$ ein *Anfangsstück* von X ist, falls für alle $y \in Y$ gilt: $\operatorname{ext}_E(y) \subseteq Y$. Transitive Mengen sind also zum Beispiel einfach Mengen, die Anfangstücke von V bzgl. der Relation $\in$ sind.

Wir definieren

$$\mathcal{F} := \{f : f \text{ ist Funktion, } \operatorname{vb} f \text{ ist ein Anfangstück von } X \text{ und für alle } x \in \operatorname{vb} f \text{ gilt } f(x) = G(x, f \restriction \operatorname{ext}_E(x))\}$$

Ähnlich wie im Beweis des Rekursionssatzes kann man nun zeigen, dass $F := \bigcup \mathcal{F}$ das Gewünschte leistet und durch die Rekursionsvorschrift eindeutig bestimmt ist. □

Man kann sich fragen, warum im Rekursionssatz für fundierte Relationen die Funktion G nicht nur ein Argument hat, nämlich $F \restriction \operatorname{ext}_E(x)$, hat, sondern zusätzlich noch x selber. Der Grund für diesen Unterschied zum Rekursionssatz für Wohlordnungen ist, dass sich im Falle einer Wohlordnung E das x aus der Funktion $F \restriction \operatorname{ext}_E(x)$ rekonstruieren lässt. Es gilt nämlich $x = \sup \operatorname{vb}(F \restriction \operatorname{ext}_E(x))$. Im allgemeinen Fall geht das jedoch nicht. Deshalb führt man x als zusätzliches Argument ein und erhält einen besser anwendbaren Satz.

Übung 10.1. *Man führe den Beweis des Rekursionssatzes für fundierte Relationen genau aus.*

(Fund) Fundierungsaxiom. Die Relation $\in$ ist fundiert.

Wegen (Fund) können wir unsere bisherigen Erkenntnisse über fundierte Relationen auch auf $\in$ anwenden. Insbesondere können wir Induktion und Rekursion bezüglich $\in$ benutzen.

Korollar 10.8. *Sei Φ eine Eigenschaft von Mengen. Für alle x gelte: haben alle $y \in x$ die Eigenschaft Φ, so hat auch x die Eigenschaft Φ. Dann haben alle Mengen die Eigenschaft Φ.*

Korollar 10.9. *Sei $G : V \to V$ eine Funktion. Dann gibt es genau eine Funktion $F : V \to V$, so dass für alle x gilt:*

$$F(x) = G(F \restriction x)$$

Definition 10.10. Wir definieren rekursiv eine Funktion $F : \mathrm{Ord} \to V$. Für $F(\alpha)$ schreiben wir V_α. Sei $V_\emptyset := \emptyset$ und $V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathrm{Ord}$. Ist α Limesordinalzahl, so sei

$$V_\alpha := \bigcup\{V_\beta : \beta < \alpha\}.$$

Satz 10.11. *a) Jedes V_α ist transitiv.*
b) Für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ mit $\alpha \leq \beta$ gilt $V_\alpha \subseteq V_\beta$.
c) $V = \bigcup\{V_\alpha : \alpha \in \mathrm{Ord}\}$

Beweis. a) folgt mittels Induktion über Ord daraus, dass Potenzmengen transitiver Mengen sowie Vereinigungen über Klassen transitiver Mengen transitiv sind.

b) Sei $\alpha \in \mathrm{Ord}$. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $\beta \geq \alpha$. Offenbar ist $V_\alpha \subseteq V_\alpha$. Gelte $V_\alpha \subseteq V_\beta$. Wegen der Transitivität von V_β ist jedes Element von V_α Teilmenge von V_β. Das zeigt $V_\alpha \subseteq \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta+1}$.

Sei nun $\beta > \alpha$ eine Limesordinalzahl. Dann ist

$$V_\alpha \subseteq \bigcup\{V_\gamma : \gamma < \beta\} = V_\beta.$$

c) Wir zeigen induktiv, dass jede Menge x in einem V_α liegt. Sei also x Menge, so dass jedes $y \in x$ in einem V_α liegt. Setze

$$f : x \to \mathrm{Ord}; y \mapsto \min\{\alpha \in \mathrm{Ord} : y \in V_\alpha\}.$$

Sei $\beta := \sup(f[x])$. Wegen b) ist jedes $y \in x$ Element von V_β. Damit ist x eine Teilmenge von V_β. Also ist $x \in \mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta+1}$. □

Nach Satz 10.11 c) gibt es für jedes x eine Ordinalzahl α mit $x \in V_\alpha$. Betrachtet man die wachsende Hierarchie der V_α, so stellt man fest, dass nur in den Nachfolgerschritten neue Elemente hinzukommen. Das rechtfertigt die folgende Definition:

Definition 10.12. Für jede Menge x sei

$$\mathrm{rg}\, x := \min\{\alpha \in \mathrm{Ord} : x \in V_{\alpha+1}\}$$

der *Rang* von x.

Übung 10.2. *a) Seien x und y Mengen. Zeige: $x \in y \Rightarrow \mathrm{rg}\, x < \mathrm{rg}\, y$.*
b) Zeige: für jede Ordinalzahl α ist $\mathrm{rg}\, \alpha = \alpha$ und $V_\alpha \cap \mathrm{Ord} = \alpha$.
c) Zeige: für jede Menge x ist $\mathrm{rg}\, x = \sup\{\mathrm{rg}(y) + 1 : y \in x\}$.

Man beachte, dass (Fund) für die Definition der V_α nicht benötigt wird. (Fund) wird nur für den Nachweis von $V = \bigcup\{V_\alpha : \alpha \in \mathrm{Ord}\}$ benutzt. Es lässt übrigens zeigen, dass die Klasse $W := \bigcup\{V_\alpha : \alpha \in \mathrm{Ord}\}$ alle ZF-Axiome erfüllt, auch wenn V nur ZF ohne das Fundierungsaxiom erfüllt.

Das Fundierungsaxiom wird in der sonstigen Mathematik eigentlich nicht gebraucht, für den Stoff der Vorlesung „Modelle der Mengenlehre“ ist es aber unverzichtbar.

Wir beweisen nun noch eine allgemeinere Form des Isomorphiesatzes von Mostowski.

Satz 10.13 (Mostowski)**.** *Sei E eine extensionale, fundierte Relation auf einer Klasse X. Dann gibt es eine transitive Klasse T und einen Isomorphismus $F : (X, E) \to (T, \in)$. T und f sind dabei eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir definieren $F : X \to V$ durch die Rekursionsvorschrift $F(x) = \{F(y) : y \in \mathrm{ext}_E(x)\}$ und setzen $T = F[X]$. Offensichtlich gilt dann für alle $x, y \in X$ mit xEy auch $F(x) \in F(y)$.

Die Funktion F ist injektiv: Sonst sei $x \in X$ minimal mit der Eigenschaft, dass es ein von x verschiedenes $y \in X$ mit $F(x) = F(y)$ gibt. Nach Rekursionsvorschrift gilt dann $\{F(z) : z \in \mathrm{ext}_E(x)\} = \{F(z) : z \in \mathrm{ext}_E(y)\}$. Nach Wahl von x gibt es

für kein $z \in \mathrm{ext}_E(x)$ ein von z verschiedenes $z' \in X$ mit $F(z) = F(z')$. Es folgt, dass F auf der Menge $F^{-1}[F[\mathrm{ext}_E(x)]]$ injektiv ist. Damit gilt $\mathrm{ext}_E(x) = \mathrm{ext}_E(y)$. Da E extensional ist, folgt daraus $x = y$. Ein Widerspruch.

Damit ist F eine Bijektion von X nach T. Seien nun $x, y \in X$ mit $F(x) \in F(y)$. Nach Definition von F existiert dann ein $z \in X$ mit $F(z) = F(x)$ und zEy. Da F injektiv ist, ist $x = z$. Damit gilt xEy. Es folgt, dass F ein Isomorphismus ist.

Die Transitivität von T ergibt sich nun wie folgt: Sei $t \in T$ und $s \in t$. Dann existiert $y \in X$ mit $F(y) = t$. Es gilt $t = F(y) = \{F(x) : x \in \mathrm{ext}_E(y)\}$. Also ist s von der Form $F(x)$ für ein $x \in \mathrm{ext}_E(y)$. Damit gilt $s = F(x) = \{F(z) : z \in \mathrm{ext}_E(x)\} \subseteq T$. Darau folgt, dass T transitiv ist.

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit von F und T. Sei S transitiv und $G : (X, E) \to (S, \in)$ ein Isomorphismus. Angenommen $F \neq G$. Sei $y \in X$ minimal mit der Eigenschaft, dass $F(y)$ von $G(y)$ verschieden ist. Es ist $F(y) = \{F(x) : x \in \mathrm{ext}_E(y)\} = \{G(x) : x \in \mathrm{ext}_E(y)\}$. Da G ein Isomorphismus ist, gilt $F(y) = \{G(x) : x \in \mathrm{ext}_E(y)\} \subseteq G(y)$. Wegen $F(y) \neq G(y)$ existiert ein $s \in G(y) \setminus F(y)$. Wegen der Transitivität von S ist $s \in S$. Damit gibt es ein $x \in X$ mit $G(x) = s$. Wegen $s \in G(y)$ gilt xEy und damit $F(x) \in F(y)$. Das steht aber im Widerspruch zu $s \notin F(y)$. □

Diese Version des Satzes von Mostowski wird in der Vorlesung „Modelle der Mengenlehre“ häufig angewendet.

11. Das Auswahlaxiom und einige Äquivalenzen

Definition 11.1. Sei I eine Menge und $F = (X_i)_{i\in I}$ eine mit I indizierte Familie von Mengen. (Formal ist F also einfach eine Funktion mit $\operatorname{vb} F = I$.) Eine *Auswahlfunktion* für F ist eine Funktion $c : I \to \bigcup\{X_i : i \in I\}$ mit $c(i) \in X_i$ für alle $i \in I$.

Eine Auswahlfunktion c wählt also aus jedem X_i ein Element aus. So eine Funktion kann es natürlich höchstens dann geben, wenn die X_i nicht leer sind.

(AC) Auswahlaxiom. Jede Familie $(X_i)_{i\in I}$ nichtleerer Mengen hat eine Auswahlfunktion.

Das Auswahlaxiom gehört nicht zu den ZF-Axiomen und ist auch von ihnen unabhängig. D.h., es lässt sich zeigen, dass weder (AC) noch ¬(AC) aus ZF folgen. (AC) spielt insofern eine Sonderrolle, als dass viele seiner Konsequenzen sehr paradox klingen, was an der völlig unkonstruktiven Natur dieses Axioms liegt.

Eine sehr populäre Paradoxie ist das *Banach-Tarski Paradoxon*: die dreidimensionale Vollkugel lässt in endlich viele Teile zerlegen, die, anders zusammengesetzt, zwei Vollkugeln der ursprünglichen Größe ergeben. Das ist kein Widerspruch, weil die Teile nicht (Lebesgue-)messbar sein müssen. Allerdings schließt (AC) auch gewisse Paradoxien aus. Zum Beispiel kann es ohne (AC) eine unendliche Menge a geben, so dass für jede Teilmenge b von a gilt: b oder $a \setminus b$ ist endlich.

Ab dem nächsten Kapitel werden wir fast alle Beweise in der Mengenlehre ZFC, also in ZF zusammen mit dem Auswahlaxiom, führen.

Definition 11.2. Sei $(P, <)$ eine halbgeordnete Menge. Eine Menge $K \subseteq P$ heißt *Kette*, wenn K durch $<$ linear geordnet ist.

Satz 11.3. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(1) (AC)
(2) (Zermeloscher Wohlordnungssatz) *Auf jeder Menge X gibt es eine Wohlordnung $<$.*
(3) (Zornsches Lemma) *Ist $(P, <)$ eine nichtleere halbgeordnete Menge und hat jede Kette in P eine obere Schranke, so hat P ein maximales Element.*

Beweis. (1)⇒(2): Sei X eine Menge. Nach (AC) gibt es eine Funktion

$$c : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$$

mit $c(M) \in M$ für alle $M \subseteq X$. Sei u eine Menge, die kein Element von X ist. (So eine Menge u existiert, da V eine echte Klasse ist und damit $X \neq V$ gilt.) Wir definieren eine Funktion $F : Ord \to X \cup \{u\}$ wie folgt: sei $\alpha \in \mathrm{Ord}$ und $F(\beta)$ bereits definiert für alle $\beta < \alpha$. Setze

$$F(\alpha) := \begin{cases} u, & \text{falls es ein } \beta < \alpha \text{ mit } F(\beta) = u \text{ gibt,} \\ u, & \text{falls } X = F[\alpha] \text{ ist und} \\ c(X \setminus F[\alpha]), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei $C := \{\beta \in \mathrm{Ord} : F(\beta) \in X\}$. Dann ist C ein Anfangsstück von Ord. Sind $\alpha, \beta \in C$ mit $\alpha < \beta$, so ist

$$F(\beta) \in X \setminus \{F(\gamma) : \gamma < \beta\}.$$

Insbesondere ist $F(\alpha) \neq F(\beta)$. Damit ist $F \restriction C$ injektiv. Nach (Ers) ist mit X auch C eine Menge. Also existiert eine Ordinalzahl α mit $C = \alpha$. Die Funktion $f := F \restriction \alpha$ ist eine Bijektion zwischen α und X.

Wir definieren nun eine Wohlordnung $<$ auf X mittels

$$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad f^{-1}(x) \in f^{-1}(y).$$

(2)⇒(3) Sei $(P,<)$ eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat. Angenommen, P hat kein maximales Element. Nach (2) existiert eine Wohlordnung $\prec$ auf P.

Wir definieren eine Funktion

$$s : \{K \subseteq P : K \text{ ist Kette in } P\} \to P,$$

so dass $s(K)$ für jede Kette $K \subseteq P$ eine echte obere Schranke von K ist. (Eine echte obere Schranke von K ist eine obere Schranke, die selbst nicht Element von K ist.)

Das geht wie folgt: ist $K \subseteq P$ eine Kette, so hat K eine obere Schranke $x \in P$. Da x nicht maximal in P ist, existiert $y \in P$ mit $x < y$. Offenbar ist y eine echte obere Schranke von K. Jede Kette in P hat also eine echte obere Schranke. Für jede Kette $K \subseteq P$ sei $s(K) \in P$ die bzgl. $\prec$ kleinste echte obere Schranke von K.

Mit Hilfe von s konstruieren wir nun eine injektive Funktion $F : \mathrm{Ord} \to P$. Das ist ein Widerspruch, da P Menge ist und Ord eine echte Klasse.

Sei $\alpha \in \mathrm{Ord}$. Für alle $\beta < \alpha$ sei $F(\beta)$ bereits definiert und für alle $\gamma < \beta$ gelte $F(\gamma) < F(\beta)$. Offenbar ist $K := \{F(\beta) : \beta < \alpha\}$ eine Kette. Setze $F(\alpha) := s(K)$. Es ist klar, dass F streng monoton und damit injektiv ist.

(3)⇒(1) Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie nichtleerer Mengen. Setze

$$P := \{f : f \text{ ist Funktion, } \mathrm{vb}\, F \subseteq I \text{ und für alle } i \in I \text{ ist } f(i) \in X_i\}.$$

Man beachte, dass P zumindest die leere Funktion enthält. Damit ist P nicht leer. Wegen $P \subseteq I \times \bigcup\{X_i : i \in I\}$ ist P Menge. P ist halbgeordnet durch $\subsetneq$.

Sei $K \subseteq P$ eine Kette. Dann sind die Funktionen in K paarweise verträglich. Damit ist $h := \bigcup K$ eine Funktion. Offenbar gilt $\mathrm{vb}\, h \subseteq I$. Für jedes $i \in \mathrm{vb}\, h$ existiert ein $f \in K$ mit $i \in \mathrm{vb}\, f$. Es gilt $h(i) = f(i) \in X_i$. Damit ist $h \in P$. Es ist klar, dass h eine obere Schranke von K ist.

Nach (3) hat P ein maximales Element c. Wir haben $\mathrm{vb}\, c = I$ zu zeigen. Angenommen, es gibt $i \in I$ mit $i \notin \mathrm{vb}\, c$. Wegen $X_i \neq \emptyset$ gibt es ein $x \in X$. Setze $f := c \cup \{(i,x)\}$. Dann gilt $f \in P$ und $c \subsetneq f$. Damit ist c nicht maximal in P. Ein Widerspruch. □

Übung 11.1. *Zeige, dass* (AC) *äquivalent zu folgender Aussage ist:*

Für jede Menge X und jede Äquivalenzrelation $\sim$ auf X existiert eine Menge $T \subseteq X$, die jede $\sim$-Äquivalenzklasse in genau einem Punkt schneidet.

Eine bekannte Anwendung des Zornschen Lemmas ist der Basisexistenzsatz für Vektorräume. Mit dem Wohlordnungssatz lässt sich relativ elegant der algebraische Abschluss eines gegebenen Körpers konstruieren. Wir geben noch eine Anwendung von (AC) an.

Lemma 11.4. *Es gibt eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$, die nicht Lebesgue-messbar ist.*

Beweis. Für eine messbare Teilmenge T von $\mathbb{R}$ bezeichne $\mu(T)$ das Lebesguesche Maß von T. Wir benutzen folgende Eigenschaften des Lebesgueschen Maßes:

(1) Ist $T \subseteq \mathbb{R}$ messbar, so ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ auch $a + T = \{a + b : b \in T\}$ messbar und es gilt $\mu(T) = \mu(a + T)$ (Translationsinvarianz).
(2) Sind $T_n \subseteq \mathbb{R}$, $n \in \omega$, paarweise disjunkt und messbar, so ist auch $\bigcup\{T_n : n \in \omega\}$ messbar und es gilt $\mu(\bigcup\{T_n : n \in \omega\}) = \sum_{n\in\omega} \mu(T_n)$ (σ-Additivität). Dabei ist ∞ als Maß einer Menge erlaubt.
(3) $\mu([0,1)) = 1$ und $\mu(\emptyset) = 0$.

Betrachte die Äquivalenzrelation

$$\sim := \{(x,y) \in [0,1)^2 : x - y \in \mathbb{Q}\}$$

auf $[0,1)$. Nach Übung 11.1 gibt es eine Menge $M \subseteq [0,1)$, die jede $\sim$-Äquivalenzklasse in genau einem Punkt trifft. Wir zeigen, dass M nicht messbar ist.

Angenommen doch. Sei $\varepsilon = \mu(M)$. Für jedes $a \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$ sei

$$M_a := \{a + b : b \in M \wedge a + b < 1\} \cup \{a + b - 1 : b \in M \wedge a + b \geq 1\}$$

Es gilt $[0,1) = \bigcup\{M_a : a \in \mathbb{Q} \cap [0,1)\}$. Für $a, b \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$ mit $a \neq b$ ist $M_a \cap M_b = \emptyset$. Wegen der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ gilt

$$1 = \mu([0,1)) = \sum_{a \in [0,1) \cap \mathbb{Q}} \mu(M_a) = \sum_{a \in [0,1) \cap \mathbb{Q}} \varepsilon.$$

Das führt aber sowohl im Falle $\varepsilon = 0$ als auch im Falle $\varepsilon > 0$ zu einem Widerspruch. □

12. Kardinalzahlen

Wir definieren in diesem Abschnitt die Klasse Card der Kardinalzahlen als Teilklasse von Ord. Für endliche Mengen x haben wir bereits die Mächtigkeit $|\, x \,|$ definiert. Im endlichen Falle ist $|x|$ eine natürliche Zahl und damit insbesondere eine Ordinalzahl. Analog werden wir jeder unendlichen Menge x eine bestimmte Ordinalzahl $|x|$ zuordnen, so dass es eine Bijektion zwischen x und $|x|$ gibt. Anders als im endlichen Fall ist jedoch eine Ordinalzahl α noch nicht dadurch eindeutig bestimmt, dass es eine Bijektion zwischen x und α gibt.

Wir stellen zunächst ein paar Betrachtungen über die Existenz von Bijektionen zwischen Mengen an, die ohne den Begriff „Kardinalzahl“ auskommen.

Lemma 12.1. *Sei x eine Menge. Dann gibt es ein injektives $f : x \to \mathcal{P}(x)$ und ein bijektives $g : \mathcal{P}(x) \to {}^x2$, aber kein surjektives $h : x \to \mathcal{P}(x)$.*

Beweis. Für $z \in x$ sei $f(z) := \{z\}$. Offenbar ist $f : x \to \mathcal{P}(x)$ injektiv.

Für jedes $y \subseteq x$ sei $g(y)$ die charakteristische Funktion von y als Teilmenge von x. Für jedes $z \in x$ sei also

$$g(y)(z) = \begin{cases} 1, & \text{falls } z \in y \text{ und} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man rechnet leicht nach, dass $g : \mathcal{P}(x) \to {}^x2$ bijektiv ist.

Sei $h : x \to \mathcal{P}(x)$ eine Funktion. Wir zeigen, dass h nicht surjektiv ist. Setze nämlich $y := \{z \in x : z \notin h(z)\}$. Dann ist y nicht im Bild von h.

Angenommen doch. Sei $z \in x$ so, dass $h(z) = y$ gilt. Ist $z \in y$, so folgt nach Definition von y, dass z kein Element von $h(z) = y$ ist. Ein Widerspruch. Ist $z \notin h(z)$, so gilt $z \in y = h(z)$ nach Definition von y. Auch ein Widerspruch. Damit ist y nicht im Bild von h, also h nicht surjektiv. □

Satz 12.2 (Cantor-Bernsteinscher Äquivalenzsatz)**.** *Seien A und C Mengen und $g : A \to C$ und $h : C \to A$ injektiv. Dann gibt es eine Bijektion zwischen A und C.*

Beweis. Setze $B := h[C]$. Da h die Menge C bijektiv auf B abbildet, genügt es für den Beweis des Satzes, eine Bijektion $\varphi : A \to B$ anzugeben.

Setze $f := h \circ g : A \to A$. Es gilt $f[A] \subseteq B \subseteq A$. Für $n \in \omega$ seien $A_n, B_n \subseteq A$ definiert durch

$$A_0 := A, \quad B_0 := B, \quad A_{n+1} := f[A_n] \text{ und } B_{n+1} := f[B_n].$$

Es gilt

$$A_0 \supseteq B_0 \supseteq A_1 \subseteq B_1 \supseteq \ldots$$

Das folgt mittels vollständiger Induktion aus $A_0 = A \supseteq B = B_0 \supseteq f[A] = A_1$. Setze nun

$$R := \bigcap_{n\in\omega} A_n \quad \left(= \bigcap_{n\in\omega} B_n\right).$$

Für alle $n \in \omega$ ist

$$f[A_n \setminus B_n] = f[A_n] \setminus f[B_n] = A_{n+1} \setminus B_{n+1}.$$

Damit ist $f \restriction \bigcup_{n\in\omega}(A_n \setminus B_n)$ eine Bijektion auf $\bigcup_{n\in\omega}(A_{n+1} \setminus B_{n+1})$. Setze

$$\varphi := \mathrm{id}_{R\cup\bigcup_{n\in\omega}(B_n\setminus A_{n+1})} \cup \left(f \restriction \bigcup_{n\in\omega}(A_n \setminus B_n)\right).$$

Da die Vorbereiche der Funktionen, die zu φ vereinigt werden, eine Partition von A bilden, ist φ eine Funktion mit $\mathrm{vb}\,\varphi = A$. Die Bilder der Funktionen, die zu φ vereinigt werden, bilden eine Partition von B. Damit ist φ eine Bijektion zwischen A und B, wie gewünscht. □

Definition 12.3. Zwei Mengen x und y heißen *gleichmächtig* ($x \approx y$), wenn eine Bijektion zwischen ihnen existiert.

Eine Ordinalzahl κ heißt *Kardinalzahl*, wenn es keine Ordinalzahl $\alpha < \kappa$ mit $\alpha \approx \kappa$ gibt. Die Klasse der Kardinalzahlen wird mit Card bezeichnet.

Lemma 12.4. *a) Jede natürliche Zahl ist Kardinalzahl. Die Ordinalzahl ω ist Kardinalzahl.*

b) Jede unendliche Kardinalzahl ist Limesordinalzahl.

c) Ist M eine Menge von Kardinalzahlen, so ist die Ordinalzahl $\sup M$ *eine Kardinalzahl. (Dabei bezieht sich* sup *auf das Supremum in der Klasse der Ordinalzahlen.)*

Beweis. a) Ist n eine natürliche Zahl und $\alpha < n$, so gilt $\alpha \not\approx n$ nach Lemma 9.7. Damit ist n Kardinalzahl.

Sei nun $\alpha < \omega$. Dann ist α eine natürliche Zahl. Nach Lemma 9.7 gilt wieder $\alpha \not\approx \omega$. Damit ist auch ω eine Kardinalzahl.

b) Sei α eine unendliche Ordinalzahl, die keine Limesordinalzahl ist. Dann existiert eine Ordinalzahl $\beta < \alpha$ mit $\alpha = \beta+1$. Wir zeigen, dass α und β gleichmächtig sind. Damit ist α keine Kardinalzahl.

Da α unendlich ist, ist auch β unendlich. Die natürlichen Zahlen sind also ein Anfangsstück von α und β. Sei $f : \beta \to \alpha$ wie folgt definiert:

$$f(\gamma) := \begin{cases} \gamma, & \text{falls } \gamma \geq \omega, \\ \gamma - 1, & \text{falls } \gamma \in \omega \setminus \{0\} \text{ und} \\ \beta, & \text{falls } \gamma = 0. \end{cases}$$

Offenbar ist f bijektiv.

c) Sei M eine Menge von Kardinalzahlen und $\kappa := \sup M$. Ist $M = \emptyset$, so ist $\kappa = 0$ und damit, nach a), Kardinalzahl. Also können wir annehmen, dass M nicht leer ist.

Sei $\alpha < \kappa$. Angenommen, es gibt eine Bijektion $f : \kappa \to \alpha$. Wegen $\alpha < \kappa$ existiert ein $\lambda \in M$ mit $\alpha < \lambda$. Die Funktion $f \restriction \lambda$ ist eine Injektion von λ nach α. Offenbar ist id_α eine Injektion von α nach λ. Nach Satz 12.2 sind α und λ damit gleichmächtig. Das ist aber ein Widerspruch zu der Annahme, dass mit allen Elementen von M auch λ eine Kardinalzahl ist. □

Für jede wohlgeordnete Menge $(x, <)$ ist das Mostowski-Bild von x eine Ordinalzahl α. Da der Mostowski-Isomorphismus zwischen x und α eine Bijektion ist, gilt

$\alpha \approx x$. Nach Satz 11.3 lässt sich unter (AC) jede Menge wohlordnen. Also ist jede Menge mit einer Ordinalzahl gleichmächtig. Damit ist folgende Definition sinnvoll:

Definition 12.5. Für jede Menge x sei $|\,x\,|$ die kleinste Ordinalzahl, die mit x gleichmächtig ist.

Lemma 12.6. *a) Für jede Menge x ist $|x|$ eine Kardinalzahl. Außerdem ist $|x|$ die einzige Kardinalzahl, die mit x gleichmächtig ist (aber im unendlichen Fall nicht die einzige Ordinalzahl mit dieser Eigenschaft).*

b) Für jede Kardinalzahl κ ist $|\kappa| = \kappa$.

Beweis. a) Sei $\alpha < |x|$. Da $|x|$ die kleinste Ordinalzahl β mit $\beta \approx x$ ist, gibt es keine Bijektion zwischen α und $|x|$. Damit ist $|x|$ eine Kardinalzahl. Sei κ eine weitere Kardinalzahl mit $\kappa \approx x$. Dann gilt $\kappa \approx |x|$. Nachdem, was wir eben bemerkt haben, ist $|x| \leq \kappa$. Da κ eine Kardinalzahl ist, folgt $|x| = \kappa$.

b) folgt unmittelbar aus der Definition einer Kardinalzahl. □

Lemma 12.7. *Seien x und y Mengen, $x \neq \emptyset$.*

a) $|x| = |y|$ gilt genau dann, wenn es eine Bijektion zwischen x und y gibt.

b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $|x| \leq |y|$

(2) *Es gibt eine Injektion $f : x \to y$.*

(3) *Es gibt eine Surjektion $g : y \to x$.*

Beweis. a) Angenommen $|x| = |y|$. Dann ist $x \approx |x| = |y| \approx y$, also $x \approx y$. Sei umgekehrt $x \approx y$. Dann gilt $|x| \approx x \approx y$, also $|x| \approx y$. Nach Lemma 12.6 ist damit $|x| = |y|$.

b) (1)⇒(2): Sei $|\,x\,| \leq |\,y\,|$. Fixiere Bijektionen $b_0 : x \to |\,x\,|$ und $b_1 : |\,y\,| \to y$. Sei $e : |x| \to |y|$ die Identität. Dann ist $b_1 \circ e \circ b_0 : x \to y$ injektiv.

(2)⇒(1): Sei $f : x \to y$ injektiv. Angenommen, $|\,y\,| < |\,x\,|$. Dann existiert eine Injektion $e : y \to x$. Nach Satz 12.2 gilt $x \approx y$ und damit $|x| = |y|$, ein Widerspruch.

(2)⇒(3): Sei $f : x \to y$ injektiv. Wegen $x \neq \emptyset$ existiert ein $z \in x$. Definiere $g : y \to x$ wie folgt:

Für alle $a \in \operatorname{nb} f$ sei $g(a) := f^{-1}(a)$. Für alle $a \in y \setminus \operatorname{nb} f$ sei $g(a) := z$. Wegen $x \subseteq \operatorname{vb} f \subseteq \operatorname{nb} g$ ist g surjektiv.

(3)⇒(2): Sei $g : y \to x$ surjektiv. Sei f eine Auswahlfunktion für die Familie $(g^{-1}[\{z\}])_{z \in x}$. Dann ist $f : x \to y$ injektiv. □

Nach Lemma 12.1 gibt es für jede Menge x zwar eine Injektion von x nach $\mathcal{P}(x)$, aber keine Bijektion. Damit ist $|\,x\,| < |\,\mathcal{P}(x)\,|$. Insbesondere gibt es zu jeder Kardinalzahl eine echt größere Kardinalzahl. Das rechtfertigt folgende Definition:

Definition 12.8. Für jede Kardinalzahl κ sei

$$\kappa^+ := \min\{\mu \in \mathrm{Card} : \kappa < \mu\}.$$

Wir definieren eine Funktion $\aleph : \mathrm{Ord} \to \mathrm{Card}$, die die unendlichen Kardinalzahlen streng monoton aufzählt. ($\aleph$, gesprochen *aleph*, ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets.) Anstelle von $\aleph(\alpha)$ schreibt man $\aleph_\alpha$.

Setze $\aleph_0 := \omega$. Ist $\aleph_\alpha$ bereits definiert, so sei $\aleph_{\alpha+1} := (\aleph_\alpha)^+$. Ist δ eine Limesordinalzahl und ist $\aleph_\alpha$ bereits definiert für alle $\alpha < \delta$, so sei $\aleph_\delta := \sup\{\aleph_\alpha : \alpha < \delta\}$.

Es ist klar, dass $\aleph : \mathrm{Ord} \to \mathrm{Card}$ streng monoton ist. Damit ist $\aleph[\mathrm{Ord}]$ eine echte Klasse. Für jede unendliche Kardinalzahl κ gibt es eine Ordinalzahl α mit $\kappa = \aleph_\alpha$.

Andernfalls sei κ die kleinste unendliche Kardinalzahl, die nicht von der Form $\aleph_\alpha$ für ein $\alpha \in \mathrm{Ord}$ ist. Wegen $\aleph_0 = \omega$ ist $\aleph_0 < \kappa$. Mittels transfiniter Induktion sieht man leicht, dass für alle $\alpha \in \mathrm{Ord}$ gilt: $\aleph_\alpha < \kappa$. Damit ist $\aleph[\mathrm{Ord}] \subseteq \kappa$. Das widerspricht aber der oben getroffenen Feststellung, dass $\aleph[\mathrm{Ord}]$ eine echte Klasse ist.

Damit ist

$$\mathrm{Card}\setminus\omega = \{\aleph_\alpha : \alpha \in \mathrm{Ord}\}.$$

Definition 12.9. Eine Kardinalzahl $\aleph_\alpha$ heißt *Nachfolgerkardinalzahl*, falls α eine Nachfolgerordinalzahl ist, und *Limeskardinalzahl*, falls α eine Limesordinalzahl ist.

Übung 12.1. *a) Eine Menge x heißt* abzählbar*, falls $|\,x\,| \leq \aleph_0$ ist. Sei α eine abzählbare Limesordinalzahl. Zeige, dass es eine streng monoton wachsende Folge $(\beta_n)_{n\in\omega}$ mit $\alpha = \sup\{\beta_n : n \in \omega\}$ gibt.*

Hinweis: Da α Limesordinalzahl ist, ist $\alpha \neq \emptyset$. Man nehme eine Surjektion von ω auf α her und konstruiere zunächst eine Folge $(\gamma_n)_{n\in\omega}$ in α mit $\alpha = \sup\{\gamma_n : n \in \omega\}$, die nur monoton wächst.

b) Ist $(X, <)$ eine wohlgeordnete Menge und $Y \subseteq X$, so ist

$$\mathrm{otp}(Y, <) \leq \mathrm{otp}(X, <).$$

Übung 12.2. *Zeige, dass es für jede abzählbare Ordinalzahl α eine streng monotone Funktion $f : (\alpha, \in) \to (\mathbb{R}, <)$ gibt.*

Hinweis: Benutze transfinite Induktion. Man beachte, dass $((0, 1), <)$ zu $(\mathbb{R}, <)$ isomorph ist. Ist α eine abzählbare Limesordinalzahl, so gibt es nach Übung 12.1 a) eine streng monoton wachsende Folge $(\beta_n)_{n\in\omega}$ mit $\alpha = \sup\{\beta_n : n \in \omega\}$. Nach Übung 12.1 b) ist für jedes $n \in \omega$ das Interval

$$[\beta_n, \beta_{n+1}) = \{\gamma \in \mathrm{Ord} : \beta_n \leq \gamma < \beta_{n+1}\}$$

isomorph zu einer Ordinalzahl $\leq \beta_{n+1}$.

13. Kardinalzahlarithmetik

In diesem Abschnitt definieren wir für Kardinalzahlen κ und λ die Kardinalzahlen $\kappa + \lambda$, $\kappa \cdot \lambda$ und κ^λ. Trotz gleicher Schreibweise haben die Kardinalzahloperationen $+$ und $\cdot$ nichts mit den früher definierten Ordinalzahloperationen zu tun.

Definition 13.1. Seien $\kappa, \lambda \in \mathrm{Card}$. Weiter seien A und B disjunkte Mengen mit $|A| = \kappa$ und $|B| = \lambda$. Setze

$$\kappa + \lambda := |A \cup B|, \qquad \kappa \cdot \lambda := |A \times B|, \qquad \kappa^\lambda := |{}^B A| \ .$$

Es ist klar, dass diese Definitionen von der Wahl von A und B unabhängig sind.

Wir werden demnächst sehen, dass sich Summe und Produkt unendlicher Kardinalzahlen sehr einfach berechnen lassen. Potenzen κ^λ lassen sich in ZFC jedoch so gut wie gar nicht berechnen. Im Allgemeinen kann man nur gewisse untere Schranken für κ^λ angeben.

Lemma 13.2. *Seien $\kappa, \lambda, \mu \in \mathrm{Card}$.*

a) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$, $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$

b) $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$, $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$

c) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$

d) $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$

e) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$

f) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$

g) Sind $\kappa', \lambda' \in \mathrm{Card}$ mit $\kappa' \leq \kappa$ und $\lambda' \leq \lambda$, so gilt $\kappa' + \lambda' \leq \kappa + \lambda$, $\kappa' \cdot \lambda' \leq \kappa \cdot \lambda$ und ${\kappa'}^{\lambda'} \leq \kappa^\lambda$.

Beweis. c) Seien A, B und C paarweise disjunkte Mengen mit $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$ und $|C| = \mu$. Wie man leicht nachrechnet, ist $A \times (B \cup C) = A \times B \cup A \times C$. Das zeigt $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$.

d) Seien A, B und C wie oben. Weiter seien $\pi_A : A \times B \to A$ und $\pi_B : A \times B \to B$ die Projektionen auf A und B. Für eine Funktion $f : C \to A \times B$ sei $f_A := \pi_A \circ f$ und $f_B := \pi_B \circ f$. Die Abbildung $f \mapsto (f_A, f_B)$ ist eine Bijektion zwischen ${}^C(A \times B)$ und ${}^C A \times {}^C B$. Das zeigt $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.

e) Seien A, B und C wie oben. Die Abbildung $(f, g) \mapsto f \cup g$ ist eine Bijektion von ${}^B A \times {}^C A$ nach ${}^{B \cup C} A$. Das zeigt $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$.

f) Sei $f : C \to {}^B A$ eine Funktion. Die Funktion f induziert eine Funktion $h(f) : B \times C \to A; (b, c) \mapsto f(c)(b)$. Die Funktion h ist eine Bijektion zwischen ${}^C({}^B A)$ und ${}^{C \times B} A$. Das zeigt $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.

g) Seien $A' \subseteq A$ und $B' \subseteq B$. Beachte, dass A' und B' automatisch disjunkt sind. Es gilt $A' \cup B' \subseteq A \cup B$ und $A' \times B' \subseteq A \times B$. Das zeigt $\kappa' + \lambda' \leq \kappa + \lambda$ und $\kappa' \cdot \lambda' \leq \kappa \cdot \lambda$.

Um ${\kappa'}^{\lambda'} \leq \kappa^\lambda$ zu zeigen, können wir annehmen, dass $\kappa > 0$ ist. Damit ist $A \neq \emptyset$. Wähle eine Funktion $g : B \setminus B' \to A$. Die Abbildung $f \mapsto f \cup g$ ist eine Injektion von ${}^{B'} A'$ nach ${}^B A$. Das zeigt ${\kappa'}^{\lambda'} \leq \kappa^\lambda$. □

Als nächstes wollen wir für unendliche Kardinalzahlen κ und λ Summe und Produkt tatsächlich berechnen. Dazu benutzen wir die im Folgenden definierte Relation $\prec$ auf Ord^2.

Definition 13.3. Für $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ sei $\max(\alpha, \beta)$ die größere der beiden Ordinalzahlen. Wir definieren eine Relation $\prec$ auf Ord^2 durch

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) \prec (\gamma, \delta) \quad :\Leftrightarrow \quad & \max(\alpha, \beta) < \max(\gamma, \delta) \vee \\ & (\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta) \wedge \alpha < \gamma) \vee \\ & (\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta) \wedge \alpha = \gamma \wedge \beta < \delta)\end{aligned}$$

Lemma 13.4. *Die Relation $\prec$ ist eine Wohlordnung auf* Ord^2.

Beweis. Zunächst stellen wir fest, dass man $\prec$ auch wie folgt auffassen kann:

Betrachte die lexikographische Ordnung $<_{lex}$ auf Ord^3. Diese Ordnung erhält man, indem man zunächst das lexikographische Produkt von Ord und Ord bildet und dann noch einmal das lexikographische Produkt dieser neuen Ordnung mit Ord. $(\mathrm{Ord}^3, <_{lex})$ ist zwar keine Wohlordnung, da echte Anfangsstücke keine Mengen sein müssen, aber jede nichtleere Teilklasse von Ord^3 hat ein $<_{lex}$ kleinstes Element, und $<_{lex}$ ist linear. Das zeigt man genauso wie für lexikographische Produkte wohlgeordneter Mengen.

Betrachte nun die Injektion

$$e : \mathrm{Ord}^2 \to \mathrm{Ord}^3; (\alpha, \beta) \mapsto (\max(\alpha, \beta), \alpha, \beta).$$

Für $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathrm{Ord}$ gilt $(\alpha, \beta) \prec (\gamma, \delta)$ genau dann, wenn $e(\alpha, \beta) <_{lex} e(\gamma, \delta)$ ist. Damit ist $\prec$ eine lineare Ordnung, und jede nichtleere Teilklasse von Ord^2 hat ein $\prec$-minimales Element.

Es bleibt zu zeigen, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathrm{Ord}$ die Klasse

$$\prec(\alpha, \beta) = \{(\gamma, \delta) \in \mathrm{Ord}^2 : (\gamma, \delta) \prec (\alpha, \beta)\}$$

eine Menge ist.

Für alle $\gamma, \delta \in \mathrm{Ord}$ mit $(\gamma, \delta) \prec (\alpha, \beta)$ gilt $\max(\gamma, \delta) \leq \max(\alpha, \beta)$. Damit ist $\prec(\alpha, \beta) \subseteq (\max(\alpha, \beta) + 1) \times (\max(\alpha, \beta) + 1)$, also eine Menge. □

Definition 13.5. Da $(\mathrm{Ord}, <)$ und $(\mathrm{Ord}^2, \prec)$ echte wohlgeordnete Klassen sind, sind sie isomorph. Damit gibt es genau einen Isomorphismus

$$K : (\mathrm{Ord}^2, \prec) \to (\mathrm{Ord}, <).$$

Für jede Ordinalzahl ν ist $\nu \times \nu$ ein echtes Anfangsstück von $(\mathrm{Ord}^2, \prec)$. Damit ist $K[\nu \times \nu]$ ein echtes Anfangsstück von $(\mathrm{Ord}, <)$. Es gibt also eine Ordinalzahl $k(\nu)$ mit $K[\nu \times \nu] = k(\nu)$.

Es ist klar, dass die Abbildung $k : \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}$ streng monoton ist. Damit gilt für alle $\nu \in \mathrm{Ord}$: $\nu \leq k(\nu)$.

Satz 13.6. *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann gilt*

a) $K(\kappa \times \kappa) = k(\kappa) = \kappa$

b) $\kappa \cdot \kappa = \kappa$

Beweis. Aus $k(\kappa) = \kappa$ folgt $\kappa \cdot \kappa = \kappa$, da $K \restriction \kappa \times \kappa$ dann eine Bijektion zwischen $\kappa \times \kappa$ und κ ist. Das zeigt b) mit Hilfe von a).

Wir zeigen a) durch Induktion über κ. Wegen $\kappa \leq k(\kappa)$ brauchen wir jeweils nur $k(\kappa) \leq \kappa$ zu zeigen.

Sei $\kappa = \omega$. Es gilt

$$K[\omega \times \omega] = \bigcup_{n \in \omega} K[n \times n].$$

Für jedes $n \in \omega$ ist $K[n \times n]$ endlich und damit eine natürliche Zahl. Es folgt $k(\omega) \leq \omega$.

Sei nun κ eine unendliche Kardinalzahl $> \omega$. Für alle unendlichen Kardinalzahlen $\lambda < \kappa$ gelte $k(\lambda) = \lambda$ und damit $\lambda \cdot \lambda = \lambda$. Da κ eine Limesordinalzahl ist, gilt $\kappa = \bigcup\{\alpha < \kappa : \alpha \geq \omega\}$. Für jedes unendliche $\alpha < \kappa$ gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$|k(\alpha)| = |K[\alpha \times \alpha]| = |\alpha| \cdot |\alpha| = |\alpha| .$$

Es ist

$$k(\kappa) = K[\kappa \times \kappa] = \bigcup_{\omega \leq \alpha < \kappa} K[\alpha \times \alpha] = \bigcup_{\omega \leq \alpha < \kappa} k(\alpha).$$

Angenommen $k(\kappa) > \kappa$. Dann existiert $\alpha < \kappa$ mit $\kappa \leq k(\alpha)$. Wegen $|k(\alpha)|=|\alpha|$ gibt es eine Injektion von κ nach α. Wegen $\alpha < \kappa$ gibt es nach dem Satz von Cantor und Bernstein eine Bijektion zwischen α und κ. Das kann aber nicht sein, da κ eine Kardinalzahl ist. Damit gilt in der Tat $k(\kappa) = \kappa$. □

Korollar 13.7. *Seien κ und λ Kardinalzahlen und mindestens eine der beiden unendlich. Dann gilt $\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$. Sind κ und λ außerdem von 0 verschieden, so gilt $\kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.*

Beweis. O.B.d.A. sei $\kappa \leq \lambda$ und damit $\lambda \geq \omega$. Dann gilt

$$\lambda = 0 + \lambda \leq \kappa + \lambda \leq 2 \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda.$$

Ist $\kappa \neq 0$, so gilt außerdem

$$\lambda = 1 \cdot \lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda.$$

□

Korollar 13.8. *Für jede unendliche Kardinalzahl κ und alle $n \in \omega \backslash \{0\}$ gilt $\kappa^n = \kappa$.*

Korollar 13.9. *Sind κ und λ Kardinalzahlen mit $2 \leq \lambda \leq 2^\kappa$ und $\kappa \geq \omega$, so gilt $\lambda^\kappa = 2^\kappa$. Insbesondere ist $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.*

Beweis. $2^\kappa \leq \lambda^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa \cdot \kappa} = 2^\kappa$ □

Potenzen κ^λ von unendlichen Kardinalzahl lassen sich im Allgemeinen nicht leicht berechnen. Da es für keine Menge x eine Surjektion von x auf $\mathcal{P}(x)$ gibt, gilt $\kappa < 2^\kappa$ für jedes $\kappa \in \mathrm{Card}$.

Wir werden später noch weitere untere Schranken für 2^κ kennen lernen. Abgesehen von diesen recht einfachen Schranken lässt sich in ZFC kaum etwas über den Wert von 2^κ für unendliches κ sagen.

Die Aussage „$2^{\aleph_0} = \aleph_1$“ heißt (*spezielle*) *Kontinuumshypothese* (CH). Die Aussage „$\forall \kappa \in \mathrm{Card} \backslash \omega (2^\kappa = \kappa^+)$“ ist die *allgemeine Kontinuumshypothese* (GCH). Weder GCH (bzw. CH) noch ¬GCH (bzw. ¬CH) lassen sich in ZFC beweisen.

14. Anwendungen der Kardinalzahlarithmetik auf $\mathbb{R}$

Zunächst stellen wir fest, dass $\mathbb{R}$ die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ hat.

Lemma 14.1. $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

Beweis. Bekanntlich ist $|\mathbb{Q}|=|\mathbb{N}|= \aleph_0$. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}); r \mapsto \{q \in \mathbb{Q} : q \leq r\}$$

ist injektiv, da zwischen je zwei verschiedenen reellen Zahlen eine rationale Zahl liegt. Damit gilt $|\mathbb{R}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = 2^{\aleph_0}$.

Auch die Abbildung

$$^{\mathbb{N}}2 \to \mathbb{R}; f \mapsto \sum_{n \in \omega} f(n) \frac{1}{10^n}$$

ist injektiv. Das zeigt $2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}|$. □

Insgesamt gibt es damit $|\mathbb{R}|^{|\mathbb{R}|} = (2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}}$ Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Nach Korollar 13.9 gilt $(2^{\aleph_0})^{2^{\aleph_0}} = 2^{2^{\aleph_0}}$.

Jede stetige Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist eindeutig bestimmt durch ihre Einschränkung auf $\mathbb{Q}$. Damit gibt es nicht mehr stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, als es Funktionen von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ gibt, also höchstens $|\mathbb{R}|^{|\mathbb{Q}|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Natürlich gibt es auch mindestens $2^{\aleph_0}$ stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, man nehme zum Beispiel die konstanten Funktionen.

Damit sind die „meisten“ Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ nicht stetig.

Wir zeigen noch den Satz von Cantor und Bendixson, der besagt, dass jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ entweder abzählbar ist (endliche Mengen sind dabei auch abzählbar) oder die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ hat.

Definition 14.2. Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Ein Punkt $x \in M$ heißt isoliert, wenn es eine offene Menge $O \subseteq M$ gibt, so dass $M \cap O = \{x\}$ gilt. Die *Cantor-Bendixson-Ableitung* von M ist die Menge M' der Punkte von M, die nicht isoliert sind. Für jede Ordinalzahl α definiert man die α-te Cantor-Bendixson-Ableitung $M^{(\alpha)}$ rekursiv wie folgt:

Setze $M^{(0)} := M$. Ist $M^{(\alpha)}$ bereits definiert, so setze $M^{(\alpha+1)} := (M^{(\alpha)})'$. Ist α eine Limesordinalzahl und $M^{(\beta)}$ definiert für alle $\beta < \alpha$, so setze $M^{(\alpha)} := \bigcap_{\beta<\alpha} M^{(\beta)}$.

$M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *perfekt*, wenn M abgeschlossen ist und keine isolierten Punkte hat.

Lemma 14.3. *a) Ist $M \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen, so ist $M^{(\alpha)}$ für alle $\alpha \in$ Ord abgeschlossen.*

b) Für alle $M \subseteq \mathbb{R}$ existiert eine abzählbare Ordinalzahl α mit $M^{(\alpha)} = M^{(\alpha+1)}$.

Beweis. a) Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über α. $M^{(0)} = M$ ist abgeschlossen nach Voraussetzung. Sei $M^{(\alpha)}$ abgeschlossen für ein $\alpha \in$ Ord. Dann entsteht $M^{(\alpha+1)}$ durch Entfernen isolierter Punkte von $M^{(\alpha)}$. Ist $x \in M^{(\alpha)}$ isoliert, so existiert nach Definition eine offene Menge O_x mit $O_x \cap M^{(\alpha)} = \{x\}$. Setze

$$U := \bigcup \{O_x : x \text{ ist isolierter Punkt von } M^{(\alpha)}\}.$$

Dann gilt $M^{(\alpha+1)} = M^{(\alpha)} \setminus U$. Da U offen ist und $M^{(\alpha)}$ abgeschlossen, ist $M^{(\alpha+1)}$ abgeschlossen.

Sei nun $M^{(\beta)}$ abgeschlossen für alle $\beta < \alpha$. Dann ist $M^{(\alpha)}$ als Durchschnitt einer Familie abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen.

b) Angenommen, für jede Ordinalzahl $\alpha < \aleph_1$ ist $M^{(\alpha)} \neq M^{(\alpha+1)}$. Wähle für jedes $\alpha < \aleph_1$ ein offenes Intervall I_α mit rationalen Endpunkten, welches $M^{(\alpha)}$ schneidet, aber zu $M^{(\alpha+1)}$ disjunkt ist. Das geht, da $M^{(\alpha+1)}$ aus $M^{(\alpha)}$ durch Entfernen isolierter Punkte hervorgeht.

Ist $\alpha < \beta < \aleph_1$, so ist $M^{(\beta)} \subseteq M^{(\alpha+1)}$. Da I_α zu $M^{(\alpha+1)}$ und damit auch zu $M^{(\beta)}$ disjunkt ist, I_β aber $M^{(\beta)}$ schneidet, gilt $I_\alpha \neq I_\beta$. Die Abbildung

$$\aleph_1 \to \{I \subseteq \mathbb{R} : I \text{ ist offenes Interval mit Endpunkten in } \mathbb{Q}\}; \alpha \mapsto I_\alpha$$

ist also injektiv. Andererseits gibt es höchstens $|\,\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\,| = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ offene Intervalle mit rationalen Endpunkten. Ein Widerspruch. □

Lemma 14.4. *Jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist Vereinigung einer abzählbaren Menge mit einer perfekten Menge.*

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass keine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ mehr als $\aleph_0$ isolierte Punkte hat.

Für jeden isolierten Punkt x von M sei nämlich I_x ein offenes Interval mit rationalen Endpunkten mit $I_x \cap M = \{x\}$. Jeder isolierte Punkt x von M ist durch I_x eindeutig bestimmt. Es gibt aber nur abzählbar viele offene Intervalle mit rationalen Endpunkten. Also gibt es auch nur abzählbar viele isolierte Punkte von M.

Sei nun $M \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Nach Lemma 14.3 b) existiert eine abzählbare Ordinalzahl α mit $M^{(\alpha)} = M^{(\alpha+1)}$. Nach Lemma 14.3 a) ist $M^{(\alpha)}$ abgeschlossen. Damit ist $M^{(\alpha)}$ perfekt.

Die Menge $M \setminus M^{(\alpha)}$ ist abzählbar. Es gilt nämlich

$$M \setminus M^{(\alpha)} = \bigcup_{\beta<\alpha} (M^{(\beta)} \setminus M^{(\beta+1)}).$$

Nach der Bemerkung am Anfang dieses Beweises ist $M^{(\beta)} \setminus M^{(\beta+1)}$ für alle $\beta < \alpha$ abzählbar. Also ist auch $M \setminus M^{(\alpha)}$, als Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen, abzählbar. (Hier benutzen wir $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.) □

Lemma 14.5. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ perfekt und nicht leer. Dann ist $|M| = 2^{\aleph_0}$.*

Beweis. Sei ${}^{<\omega}2 := \bigcup_{n\in\omega} {}^n2$. Für $\sigma \in {}^n2$ und $i \in 2$ sei $\sigma^\frown i := \sigma \cup \{(n, i)\} \in {}^{n+1}2$. Für eine beschränkte offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}$ sei $\operatorname{diam}(O)$ der Durchmesser von O, also das Supremum der Abstände zweier Punkte aus O. Die Menge $\operatorname{cl}(O)$ sei der Abschluss von O in $\mathbb{R}$.

Wir definieren eine Familie $(x_\sigma)_{\sigma\in{}^{<\omega}2}$ von Punkten in M und eine Familie $(U_\sigma)_{\sigma\in{}^{<\omega}2}$ von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$, so dass für alle $n \in \omega$ und alle $\sigma \in {}^{<\omega}2$ gilt:

(1) $x_\sigma \in U_\sigma$
(2) $\operatorname{diam}(U_\sigma) < \frac{1}{2^n}$
(3) $U_{\sigma^\frown 0}, U_{\sigma^\frown 1} \subseteq U_\sigma$
(4) $\operatorname{cl}(U_{\sigma^\frown 0}) \cap \operatorname{cl}(U_{\sigma^\frown 1}) = \emptyset$

Es ist klar, dass man $U_\emptyset$ und $x_\emptyset$ geeignet wählen kann. Angenommen, U_σ und x_σ sind bereits gewählt für $\sigma \in {}^n2$. Da M keine isolierten Punkte hat, enthält U_σ mehr Punkte von M als nur x_σ. Seien $x_{\sigma^\frown 0}, x_{\sigma^\frown 1} \in M \cap U_\sigma$ verschieden.

Wähle offene Umgebungen $U_{\sigma^\frown i} \subseteq U_\sigma$ von $x_{\sigma^\frown i}$, $i \in 2$, mit $\operatorname{diam}(U_{\sigma^\frown i}) < \frac{1}{n^2}$ und $\operatorname{cl}(U_{\sigma^\frown 0}) \cap \operatorname{cl}(U_{\sigma^\frown 1}) = \emptyset$. Es ist klar, dass die so konstruierten Familien $(x_\sigma)_{\sigma\in{}^{<\omega}2}$ und $(U_\sigma)_{\sigma\in{}^{<\omega}2}$ das Gewünschte leisten.

Sei nun f eine Funktion von ω nach 2. Wegen (1), (2) und (3) ist $(x_{f\restriction n})_{n\in\omega}$ eine Cauchy-Folge. Damit existiert $e(f) := \lim_{n\to\infty} x_{f\restriction n}$. Da M abgeschlossen ist und die x_σ in M liegen, gilt $e(f) \in M$.

Ist g eine Funktion von ω nach 2 mit $f \neq g$, so gibt es ein $n \in \omega$ mit $f(n) \neq g(n)$. Sei n_0 das kleinste solche n. Es gilt $e(f) \in \operatorname{cl}(U_{f\restriction n_0+1})$ und $e(g) \in \operatorname{cl}(U_{g\restriction n_0+1})$. Nach (4) ist $\operatorname{cl}(U_{f\restriction n_0+1})$ disjunkt zu $\operatorname{cl}(U_{g\restriction n_0+1})$. Damit ist $e(f) \neq e(g)$.

Die Abbildung $e : {}^\omega 2 \to M$ ist also injektiv. Das zeigt $2^{\aleph_0} \leq |M|$. $|M| \leq 2^{\aleph_0}$ ist klar. □

Korollar 14.6 (Satz von Cantor und Bendixson)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen. Dann gilt $|M| \leq \aleph_0$ oder $|M| = 2^{\aleph_0}$.*

Beweis. Nach Lemma 14.4 existieren eine perfekte Menge P und eine abzählbare Menge A mit $M = P \cup A$. Ist P leer, so gilt offenbar $|M| \leq \aleph_0$. Ist P nicht leer, so gilt $|P| = 2^{\aleph_0}$ nach Lemma 14.5. In diesem Fall ist $|M| = 2^{\aleph_0}$. □

15. Reguläre und singuläre Kardinalzahlen

Um die angekündigten Abschätzungen für 2^κ angeben zu können, benötigen wir den Begriff der Kofinalität, der auch sonst in der Mengenlehre eine wesentliche Rolle spielt.

Definition 15.1. Sei $(X, <)$ eine halbgeordnete Menge. Eine Menge $A \subseteq X$ heißt *kofinal* (in X), falls für alle $x \in X$ ein $a \in A$ mit $x \leq a$ existiert. Die *Kofinalität* $\operatorname{cf}(X)$ ist die kleinste Mächtigkeit einer kofinalen Teilmenge von X. Für eine weitere Menge Y heißt eine Funktion $f : Y \to X$ kofinal (in X), wenn $f[Y]$ kofinal in X ist. Offenbar ist $\operatorname{cf}(X)$ die kleinste Kardinalzahl λ, so dass es eine kofinale Abbildung $f : \lambda \to X$ gibt.

Zum Beispiel hat ω die Kofinalität $\aleph_0$, da jede endliche Teilmenge von ω beschränkt ist. Ebenso haben $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ (mit der üblichen Ordnung) die Kofinalität $\aleph_0$ (die natürlichen Zahlen liegen sowohl in $\mathbb{Q}$ als auch in $\mathbb{R}$ kofinal).

Übung 15.1. *Zeige, dass für jede halbgeordnete Menge $(X, <)$ die Kardinalzahl* $\mathrm{cf}(X)$ *genau die kleinste Ordinalzahl α ist, so dass es eine kofinale Abbildung $f : \alpha \to X$ gibt.*

Wir betrachten im Folgenden nur Kofinalitäten von Ordinalzahlen. Beachte, dass jede Limesordinalzahl eine unendliche Kofinalität hat. Jede Nachfolgerordinalzahl hat die Kofinalität 1, da $\{\alpha\}$ eine kofinale Teilmenge von $\alpha + 1$ ist. Die Ordinalzahl 0 hat die Kofinalität 0, da die leere Menge in 0 kofinal ist.

Lemma 15.2. *Sei α eine Ordinalzahl und $\lambda = \mathrm{cf}(\alpha)$. Dann gibt es eine streng monotone, kofinale Funktion $f : \lambda \to \alpha$, die stetig ist. Dabei heißt eine streng monotone Funktion f von einer Ordinalzahl in die Ordinalzahlen* stetig, *falls für jede Limesordinalzahl $\alpha \in \mathrm{vb}\, f$ gilt: $f(\alpha) = \sup\{f(\beta) : \beta < \alpha\}$.*

Beweis. O.B.d.A. sei α eine Limesordinalzahl. Wähle $g : \lambda \to \alpha$ kofinal. Wir definieren $f : \lambda \to \alpha$ rekursiv. Sei $f(\beta)$ bereits definiert für ein $\beta < \lambda$ und gelte $f(\beta) < \alpha$. Setze $f(\beta + 1) := \max(g(\beta), f(\beta) + 1)$. Da α eine Limesordinalzahl ist, ist $f(\beta) + 1 < \alpha$ und damit $f(\beta + 1) < \alpha$.

Sei $\beta < \lambda$ eine Limesordinalzahl und $f(\gamma)$ definiert für alle $\gamma < \beta$. Für alle $\gamma < \beta$ gelte $f(\gamma) < \alpha$. Setze $f(\beta) := \sup\{f(\gamma) : \gamma < \beta\}$. Wegen $\beta < \mathrm{cf}(\alpha)$ ist $\{f(\gamma) : \gamma < \beta\}$ nicht kofinal in α. Damit ist $f(\beta) < \alpha$.

Es ist klar, dass $f : \lambda \to \alpha$ streng monoton und stetig ist. Sei $\gamma < \alpha$. Dann exitiert $\beta < \lambda$ mit $\gamma \leq g(\beta)$. Nach Definition von f gilt $\gamma \leq g(\beta) \leq f(\beta + 1)$. Das zeigt, dass f kofinal ist. □

Lemma 15.3. *a) Für jede Ordinalzahl α ist* $\mathrm{cf}(\alpha) \leq |\alpha| \leq \alpha$.
b) Ist $M \subseteq \alpha$ kofinal (in α), so ist $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{otp}(M)$.
c) Ist $(\beta_\nu)_{\nu<\gamma}$ streng monoton und kofinal in α, so ist $\mathrm{cf}(\gamma) = \mathrm{cf}(\alpha)$.
d) $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$

Beweis. a) Für jede Ordinalzahl α gilt $|\alpha| \leq \alpha$. Jede Bijektion $f : |\alpha| \to \alpha$ ist kofinal. Damit ist $\mathrm{cf}(\alpha) \leq |\alpha|$.

b) Sei $\beta := \mathrm{otp}\, M$. Dann gibt es eine Bijektion von β nach M. Also ist $|M| \leq \beta$. Damit $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \beta$.

c) Sei $M \subseteq \gamma$ kofinal in γ. Dann ist $\{\beta_\nu : \nu \in M\}$ kofinal in α. Das zeigt $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\gamma)$

Sei umgekehrt N kofinal in α. Für jedes $\delta \in N$ wähle $\nu(\delta) \in \gamma$ mit $\delta \leq \beta_{\nu(\delta)}$. Dann ist $\{\nu(\delta) : \delta \in N\}$ kofinal in γ. Das zeigt $\mathrm{cf}(\gamma) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$.

d) Sei $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ streng monoton und kofinal. Sei $g : \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) \to \mathrm{cf}(\alpha)$ kofinal. Dann ist $f \circ g : \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) \to \alpha$ kofinal. Das zeigt $\mathrm{cf}(\alpha) \leq \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))$. Die Ungleichung $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) \leq \mathrm{cf}(\alpha)$ ist klar. □

Definition 15.4. Eine unendliche Kardinalzahl κ heißt *regulär*, falls $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ gilt, sonst *singulär* (d.h., falls $\kappa < \mathrm{cf}(\kappa)$).

Zum Beispiel ist die Kardinalzahl $\aleph_0$ regulär. Die Kardinalzahl $\aleph_\omega$ ist jedoch singulär, da ihre Kofinalität $\aleph_0$ ist. Die Menge $\{\aleph_n : n \in \omega\}$ liegt nämlich kofinal in $\aleph_\omega$.

Korollar 15.5. *Für jede Limesordinalzahl α ist* $\mathrm{cf}(\alpha)$ *eine reguläre Kardinalzahl.*

Beweis. Nach Lemma 15.3 d) gilt $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)) = \mathrm{cf}(\alpha)$. □

Satz 15.6. *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann ist* $\mathrm{cf}(\kappa)$ *die kleinste Kardinalzahl λ, so dass eine Folge $(S_\gamma)_{\gamma<\lambda}$ von Teilmengen von κ existiert, so dass gilt:*

(1) $\kappa = \bigcup_{\gamma<\lambda} S_\gamma$

(2) *Für alle* $\gamma < \lambda$ *ist* $|S_\gamma| < \kappa$.

Beweis. Sei zunächst $\lambda := \mathrm{cf}(\kappa)$ und $f : \lambda \to \kappa$ kofinal. Für jedes $\gamma < \lambda$ setze $S_\gamma := f(\gamma)$. Da f kofinal ist, gilt $\kappa = \bigcup_{\gamma<\lambda} S_\gamma$. Für jedes $\gamma < \lambda$ ist außerdem $|S_\gamma| < \kappa$, da S_γ eine Ordinalzahl $< \kappa$ ist und κ eine Kardinalzahl.

Sei nun $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$. Wir zeigen, dass es keine Folge $(S_\gamma)_{\gamma<\lambda}$ von Teilmengen von κ gibt, die (1) und (2) erfüllt.

Angenommen doch. Sei $(S_\gamma)_{\gamma<\lambda}$ eine solche Folge. Wir können annehmen, dass λ unendlich ist. Für jedes $\gamma < \lambda$ sei $\kappa_\gamma := |S_\gamma| < \kappa$. Wegen $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ ist $\{\kappa_\gamma : \gamma < \lambda\}$ nicht kofinal in κ. Sei $\mu := \sup_{\gamma<\lambda} \kappa_\gamma$. Für jedes $\gamma < \lambda$ fixiere eine Bijektion $f_\gamma : S_\gamma \to \kappa_\gamma$. Für jedes $\alpha < \kappa$ sei $g(\alpha)$ das kleinste $\gamma < \lambda$ mit $\alpha \in S_\gamma$. Die Abbildung

$$\kappa \to \lambda \times \mu; \alpha \mapsto (g(\alpha), f_{g(\alpha)}(\alpha))$$

ist dann injektiv. Das zeigt $\kappa \leq \lambda \cdot \mu = \max(\lambda, \mu) < \kappa$. Ein Widerspruch. □

Korollar 15.7. *Für jede unendliche Kardinalzahl* κ *ist* κ^+ *regulär.*

Beweis. Angenommen nicht. Dann gibt es eine Kardinalzahl $\lambda < \kappa^+$ und eine Familie $(S_\gamma)_{\gamma<\lambda}$ von Teilmengen von κ^+, so dass $\kappa^+ = \bigcup_{\gamma<\lambda} S_\gamma$ ist und $|S_\gamma| < \kappa^+$ für alle $\gamma < \lambda$ gilt. Wegen $\lambda < \kappa^+$ ist $\lambda \leq \kappa$. Analog ist $|S_\gamma| \leq \kappa$ für alle $\gamma < \kappa$.

Wie im Beweis von Satz 15.6 sieht man, dass

$$\Big|\bigcup_{\gamma<\lambda} S_\gamma\Big| \leq \kappa \times \kappa = \kappa$$

gilt. Ein Widerspruch. □

Definition 15.8. Eine Kardinalzahl $\kappa > \omega$ heißt *schwach unerreichbar*, falls κ eine reguläre Limeskardinalzahl ist. Eine Kardinalzahl $\kappa > \omega$ heißt *stark unerreichbar*, falls κ regulär ist und $2^\lambda < \kappa$ für alle $\lambda < \kappa$ gilt.

Wegen $\lambda^+ \leq 2^\lambda$ für alle $\lambda \in \mathrm{Card}$ ist jede stark unerreichbare Kardinalzahl auch schwach unerreichbar. Unter GCH gilt offenbar auch die Umkehrung. Die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen lässt sich in ZFC weder beweisen noch widerlegen.

Wir schliessen dieses Kapitel mit einem topologischen Beispiel ab. Für zwei Ordinalzahlen α und β mit $\alpha < \beta$ sei das offene Interval (α, β) die Menge $\{\gamma \in \mathrm{Ord} : \alpha < \gamma < \beta\}$. Auch die Mengen $(-\infty, \beta) := [0, \beta) := \beta$, $(\alpha, \infty) := \{\gamma \in \mathrm{Ord} : \alpha < \gamma\}$ und $(-\infty, \infty) := \mathrm{Ord}$ bezeichnen wir als offene Intervalle.

Auf jeder Ordinalzahl α lässt sich wie auf $\mathbb{R}$ die *Ordnungstopologie* definieren: eine Menge $O \subseteq \alpha$ heißt offen, wenn für alle $\gamma \in O$ ein offenes Interval $I \subseteq \alpha$ existiert mit $\gamma \in I \subseteq O$. Je zwei verschiedene Elemente von α haben disjunkte offene Umgebungen. Damit ist α als topologischer Raum Hausdorff.

Eine Ordinalzahl mit ihrer Ordnungstopologie ist genau dann kompakt, wenn sie eine Nachfolgerordinalzahl ist. Das zeigt man mittels Induktion über α.

Wenn wir den Ordinalzahlcharakter einer Kardinalzahl betonen wollen, so schreiben wir ω_α anstelle von $\aleph_\alpha$. Insbesondere ist $\omega_1 + 1$ die Ordinalzahlsumme von ω_1 und 1, also die Nachfolgerordinalzahl von $\aleph_1$.

Lemma 15.9. *Sei* $\alpha := \omega_1 + 1$ *und* $p := \omega_1$.

a) Es gibt keine Folge $(\beta_n)_{n\in\omega}$ *in* $\alpha \setminus \{p\}$*, die gegen* p *konvergiert.*

b) Sei $f : \alpha = \aleph_1 + 1 \to \mathbb{R}$ *stetig. Dann existiert* $\beta < \alpha$*, so dass* f *auf* $(\beta, \omega_1 + 1)$ *konstant ist.*

Beweis. a) Sei $\beta := \sup_{n\in\omega} \beta_n$. Wegen $\mathrm{cf}(\omega_1) > \aleph_0$ ist $\beta < \omega_1$. Das Intervall $(\beta, \omega_1 + 1) \subseteq \alpha$ ist ein offenes Intervall, das p enthält, aber kein β_n. Damit konvergiert $(\beta_n)_{n\in\omega}$ nicht gegen p.

b) Da f stetig im Punkt p ist, existiert zu jedem $n \in \omega$ ein $\beta_n < \omega_1$, so dass für alle $\gamma \in (\beta_n, \omega_1 + 1)$ gilt: $|f(\gamma) - f(p)| < \frac{1}{2^n}$.

Setze $\beta := \sup_{n\in\omega} \beta_n$. Dann gilt $f(\gamma) = f(p)$ für alle $\gamma \in (\beta, \omega_1 + 1)$. □

16. Summen und Produkte von unendlich vielen Kardinalzahlen

Um etwas mehr über Potenzen λ^κ von Kardinalzahlen aussagen zu können, betrachten wir in diesem Abschnitt unendliche Summen und Produkte von Kardinalzahlen.

Definition 16.1. Sei I eine Menge und $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen. Es sei

$$\prod_{i\in I} X_i := \{c : c \text{ ist Funktion von } I \text{ nach } \textstyle\bigcup_{i\in I} X_i \text{ und für alle } i \in I \text{ ist } c(i) \in X_i\}$$

das *cartesische Produkt* der Mengen X_i. (Nach (AC) ist $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$, falls alle X_i von $\emptyset$ verschieden sind.)

Sei nun $(\kappa_i)_{i\in I}$ eine Familie von Kardinalzahlen. Für jedes $i \in I$ sei X_i eine Menge mit $|X_i| = \kappa_i$, so dass die X_i paarweise disjunkt sind. Setze

$$\sum_{i\in I} \kappa_i := \left|\bigcup_{i\in I} X_i\right| \quad \text{und} \quad \prod_{i\in I} \kappa_i := \left|\prod_{i\in I} X_i\right|.$$

Wie man leicht sieht, sind diese Definitionen unabhängig von der Wahl der X_i.

Man beachte, dass die Schreibweise für das Produkt einer Familie von Kardinalzahlen die gleiche ist, wie für das cartesische Produkt dieser Familie. Das führt jedoch üblicherweise nicht zu Verwirrungen.

Lemma 16.2. *a) Sei $(\kappa_i)_{i\in I}$ eine Familie von Kardinalzahlen mit $\kappa_i = \kappa$ für alle $i \in I$. Sei $\lambda := |I|$. Dann ist*

$$\sum_{i\in I} \kappa = \sum_{i\in I} \kappa_i = \lambda \cdot \kappa \quad \textit{und} \quad \prod_{i\in \kappa} \kappa = \prod_{i\in I} \kappa_i = \kappa^\lambda.$$

b) Ist $I = \bigcup_{j\in J} I_j$, wobei die I_j paarweise disjunkt sind, so gilt

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = \sum_{j\in J} \left(\sum_{i\in I_j} \kappa_i\right) \quad \textit{und} \quad \prod_{i\in I} \kappa_i = \prod_{j\in J} \left(\prod_{i\in I_j} \kappa_i\right).$$

c) Für jede Kardinalzahl λ ist

$$\lambda \cdot \sum_{i\in I} \kappa_i = \sum_{i\in I} \left(\lambda \cdot \kappa_i\right), \quad \left(\prod_{i\in I} \kappa_i\right)^\lambda = \prod_{i\in I} \kappa_i^\lambda \quad \textit{und} \quad \lambda^{\sum_{i\in I} \kappa_i} = \prod_{i\in I} \lambda^{\kappa_i}.$$

d) Ist $\kappa_i' \leq \kappa_i$ für alle $i \in I$, so gilt

$$\sum_{i\in I} \kappa_i' \leq \sum_{i\in I} \kappa_i \quad \textit{und} \quad \prod_{i\in I} \kappa_i' \leq \prod_{i\in I} \kappa_i$$

Lemma 16.3. *Sei I eine unendliche Menge und $\kappa_i > 0$ für alle $i \in I$. Dann ist*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = |I| \cdot \sup\{\kappa_i : i \in I\}.$$

Beweis. Sei $\kappa := \sup\{\kappa_i : i \in I\}$. Wegen $\kappa_i \leq \kappa$ für alle $i \in I$ ist $\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \sum_{i\in I} \kappa = |I| \cdot \kappa$. Wegen $\kappa_i \geq 1$ für alle $i \in I$ ist $|I| = \sum_{i\in I} 1 \leq \sum_{i\in I} \kappa_i$. Außerdem gilt $\kappa_j \leq \sum_{i\in I} \kappa_i$ für alle $j \in I$. Damit ist $\kappa \leq \sum_{i\in I} \kappa_i$. Das zeigt $|I| \cdot \kappa \leq \sum_{i\in I} \kappa_i$. □

Korollar 16.4. *Ist $|I| \leq \kappa = \sup_{i\in I} \kappa_i$, so gilt $\sum_{i\in I} \kappa_i = \sup_{i\in I} \kappa_i$.*

Sei κ eine singuläre Kardinalzahl. Als singuläre Kardinalzahl ist κ auch eine Limeskardinalzahl. Damit ist $\mathrm{Card} \cap \kappa$ kofinal in κ. Setzt man $\lambda := \mathrm{cf}(\kappa)$ und wählt $(\kappa_i)_{i\in\lambda}$ kofinal in κ, so gilt $\kappa = \sum_{i\in\lambda} \kappa_i$.

Ist umgekehrt $\kappa = \sum_{i\in\lambda} \kappa_i$, wobei λ und alle κ_i Kardinalzahlen $< \kappa$ sind, so ist $\kappa = \lambda \cdot \sup_{i\in\lambda} \kappa_i = \sup_{i\in\lambda} \kappa_i$ und damit $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa$. Also ist eine Kardinalzahl

κ genau dann singulär, wenn es $\lambda < \kappa$ und $\kappa_i < \kappa$, $i \in \lambda$, gibt, so dass $\kappa = \sum_{i\in\lambda} \kappa_i$ gilt.

Lemma 16.5. *Für alle $i \in I$ sei $2 \leq \kappa_i$. Dann ist $\sum_{i\in I} \kappa_i \leq \prod_{i\in I} \kappa_i$.*

Beweis. Wir können annehmen, dass I mindestens zwei Elemente hat. Wir betrachten zunächst den Fall, dass I genau zwei Elemente hat. O.B.d.A. sei $I = \{1, 2\}$.

Ist $\kappa_1 \geq \aleph_0$ oder $\kappa_2 \geq \aleph_0$, so gilt $\kappa_1 + \kappa_2 = \kappa_1 \cdot \kappa_2$. Sind κ_1 und κ_2 beide natürliche Zahlen, so gibt es nach Voraussetzung $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\kappa_1 = n + 2$ und $\kappa_2 = m + 2$. Es gilt

$$\kappa_1 + \kappa_2 = n + m + 4 \leq n \cdot m + 2n + 2m + 4 = \kappa_1 \cdot \kappa_2.$$

Sei nun $|I| > 2$. Ist $|I| < \aleph_0$, so lässt sich die Behauptung leicht mittels vollständiger über $|I|$ Induktion unter Ausnutzung des Falles $|I| = 2$ nachweisen.

Sei nun $|I| \geq \aleph_0$. Dann ist $|I| < 2^{|I|} = \prod_{i\in I} 2$. Wähle eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ paarweise disjunkter Mengen mit $|X_i| = \kappa_i$ für alle $i \in I$. Wir geben eine Injektion

$$\varphi : \bigcup_{i\in I} X_i \longrightarrow I \times \prod_{i\in I} X_i$$

an, was $\sum_{i\in I} \kappa_i \leq |I| \cdot \prod_{i\in I} \kappa_i = \prod_{i\in I} \kappa_i$ zeigt. Für $x \in \bigcup_{i\in I} X_i$ sei $j \in I$ so gewählt, dass $x \in X_j$ gilt. Wähle $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ mit $x = x_j$. Setze $\varphi(x) := (j, (x_i)_{i\in I})$. Es ist klar, dass φ injektiv ist. □

Lemma 16.6. *Sei λ eine unendliche Kardinalzahl und $(\kappa_i)_{i\in\lambda}$ eine monoton wachsende Folge von Kardinalzahlen > 0. Dann ist $\prod_{i\in\lambda} \kappa_i = \left(\sup_{i\in\lambda} \kappa_i\right)^{\lambda}$.*

Beweis. Setze $\kappa := \sup_{i\in\lambda} \kappa_i$. Dann ist $\prod_{i\in\lambda} \kappa_i \leq \prod_{i\in\lambda} \kappa = \kappa^{\lambda}$.

Sei nun $\varphi : \lambda \times \lambda \to \lambda$ eine Bijektion. Für jedes $j \in \lambda$ sei $A_j = \varphi[\{j\} \times \lambda]$. Dann ist λ die disjunkte Vereinigung der A_j, und jedes A_j hat die Mächtigkeit λ. Für jedes $k \in A_j$ ist $\kappa_k \leq \prod_{i\in A_j} \kappa_i$. Wegen $|A_j| = \lambda$ ist A_j kofinal in λ. Damit gilt $\kappa = \sup_{i\in A_j} \kappa_i \leq \prod_{i\in A_j} \kappa_i$. Es folgt

$$\kappa^{\lambda} = \prod_{j\in\lambda} \kappa \leq \prod_{j\in\lambda} \prod_{i\in A_j} \kappa_i = \prod_{i\in\lambda} \kappa_i.$$

□

Satz 16.7 (König)**.** *Sei I eine Menge. Für jedes $i \in I$ seien κ_i und λ_i Kardinalzahlen mit $\kappa_i < \lambda_i$. Dann ist $\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$.*

Beweis. Für jedes $i \in I$ sei X_i eine Menge mit $|X_i| = \lambda_i$. Setze $X := \prod_{i\in I} X_i$. Dann ist $|X| = \prod_{i\in I} \lambda_i$. Angenommen, $\sum_{i\in I} \kappa_i \geq |X|$.

Dann gibt es für jedes $i \in I$ eine Menge $A_i \subseteq X$ mit $|A_i| \leq \kappa_i$, so dass die A_i paarweise disjunkt sind und $X = \bigcup_{i\in I} A_i$ gilt. Für jedes $i \in I$ sei $P_i := \{c(i) : c \in A_i\}$ die *i-te Projektion* von A_i. Offenbar gilt $P_i \subseteq X_i$. Wegen

$$|X_i| = \lambda_i > \kappa_i \geq |A_i| \geq |P_i|$$

existiert $x_i \in X_i \setminus P_i$.

Setze $c := (x_i)_{i\in I}$. Offenbar ist $c \in X$. Angenommen, es gibt ein $i \in I$ mit $c \in A_i$. Dann ist $x_i = c(i) \in P_i$, ein Widerspruch zur Wahl von x_i. Also ist $c \notin \bigcup_{i\in I} A_i$, ein Widerspruch zur Wahl der A_j. □

Korollar 16.8. *a) Für $\lambda \geq 2$ und $\kappa \geq \aleph_0$ ist $\kappa < \mathrm{cf}(\lambda^{\kappa})$. Insbesondere gilt $\kappa < \mathrm{cf}(2^{\kappa}) \leq 2^{\kappa}$.*

b) Für $\kappa \geq \aleph_0$ ist $\kappa < \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.

Beweis. a) Um $\kappa < \mathrm{cf}(\lambda^\kappa)$ zu zeigen, reicht es, für alle Folgen $(\lambda_i)_{i\in\kappa}$ von Kardinalzahlen $< \lambda^\kappa$ nachzuweisen, dass $\sum_{i<\mu} \lambda_i < \lambda^\kappa$ gilt.

Nach dem Satz von König gilt für eine solche Folge $(\lambda_i)_{i\in\kappa}$ aber

$$\sum_{i\in\kappa} \lambda_i < \prod_{i\in\kappa} (\lambda^\kappa) = (\lambda^\kappa)^\kappa = \lambda^\kappa.$$

b) Für jedes $i \in \mathrm{cf}(\kappa)$ wähle $\kappa_i < \kappa$ mit $\kappa = \sum_{i\in\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i$. Es ist dann

$$\kappa = \sum_{i\in\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i < \prod_{i\in\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}.$$

□

17. Potenzen von Kardinalzahlen

Über die Exponentialfunktion $\mathrm{Card}\setminus\omega \to \mathrm{Card}\setminus\omega; \kappa \mapsto 2^\kappa$ wissen wir bisher

(1) $\kappa \leq \lambda \Rightarrow 2^\kappa \leq 2^\lambda$ und
(2) $\kappa < \mathrm{cf}(2^\kappa) \leq 2^\kappa$.

Easton hat gezeigt, dass es für reguläre Exponenten keine weiteren Einschränkungen für die Werte der Exponentialfunktion gibt, die sich in ZFC beweisen lassen.

Definition 17.1. Seien κ und μ Kardinalzahlen. Die Kardinalzahl

$$\mu^{<\kappa} := \sup_{\lambda<\kappa} \mu^\lambda$$

ist die *schwache Potenz* von μ und κ. Dabei steht λ immer für eine Kardinalzahl. Die Indexmenge in dem Supremum ist also die Menge aller Kardinalzahlen $< \kappa$.

Offenbar ist $\mu^{<\kappa} \leq \mu^\kappa$.

Übung 17.1. *Für jede Menge A und jede Kardinalzahl κ sei*

$$\begin{aligned} [A]^\kappa &:= \{X \subseteq A : |X| = \kappa\}, \\ [A]^{<\kappa} &:= \{X \subseteq A : |X| < \kappa\}, \\ [A]^{\leq\kappa} &:= \{X \subseteq A : |X| \leq \kappa\}. \end{aligned}$$

Zeige: Sind A und κ unendlich und ist $\kappa \leq |A|$, so gilt $|[A]^\kappa| = |[A]^{\leq\kappa}| = |A|^\kappa$ und $|[A]^{<\kappa}| = |A|^{<\kappa}$.

Übung 17.2. *a) Bestimme die Kofinalität der Halbordnung $([\aleph_n]^{\aleph_0}, \subseteq)$ für alle $n \in \omega$.*

b) Zeige, dass die Kofinalität von $([\aleph_\omega]^{\aleph_0}, \subseteq)$ mindestens $\aleph_\omega^+$ ist.

Lemma 17.2. *Ist κ eine Limeskardinalzahl, so gilt $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)}$.*

Beweis. Sei $\kappa = \sum_{i\in\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i$ mit $\kappa_i < \kappa$ für alle $i \in \mathrm{cf}(\kappa)$. Es gilt

$$2^\kappa = 2^{\sum_{i\in\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_i} = \prod_{i\in\mathrm{cf}(\kappa)} 2^{\kappa_i} \leq \prod_{i\in\mathrm{cf}(\kappa)} 2^{<\kappa} = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)} \leq (2^\kappa)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^{\kappa\cdot\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^\kappa.$$

□

Satz 17.3. *a) Sei κ eine singuläre Kardinalzahlzahl. Angenommen, es gibt $\lambda_0 < \kappa$, so dass für alle $\lambda < \kappa$ mit $\lambda_0 \leq \lambda$ gilt: $2^\lambda = 2^{\lambda_0}$. Dann ist $2^\kappa = 2^{\lambda_0}$.*

b) Ist κ Limeskardinalzahl und existiert kein $\lambda_0 < \kappa$ wie in a), so ist $2^\kappa = \mu^{\mathrm{cf}(\mu)}$, wobei $\mu = 2^{<\kappa}$.

Beweis. a) Wir können $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda_0$ annehmen. Nach Voraussetzung gilt $2^{<\kappa} = 2^{\lambda_0}$. Nach Lemma 17.2 gilt

$$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)} = (2^{\lambda_0})^{\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^{\lambda_0 \cdot \mathrm{cf}(\kappa)} = 2^{\lambda_0}.$$

b) Nach Voraussetzung ist die Folge $(2^\lambda)_{\lambda<\kappa}$ kofinal in $\mu = 2^{<\kappa}$. Rekursiv lässt sich eine Menge $I \subseteq \kappa \cap \mathrm{Card}$ wählen, so dass $(2^\lambda)_{\lambda\in I}$ streng monoton wächst und $\mu = \sup_{\lambda\in I} 2^\lambda$ gilt. Die Menge I ist kofinal in κ:

Sonst gäbe es eine obere Schranke $\lambda_0 < \kappa$ von I. Für jedes $\lambda < \kappa$ mit $\lambda_0 \leq \lambda$ ist dann aus Monotoniegründen $2^{\lambda_0} = 2^\lambda$. Das widerspricht aber der Annahme in b).

Da I kofinal in κ liegt und $\{2^\lambda : \lambda \in I\}$ kofinal in μ, gilt $\mathrm{cf}(\kappa) = \mathrm{cf}(I) = \mathrm{cf}(\mu)$. Es folgt

$$2^\kappa = \mu^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \mu^{\mathrm{cf}(\mu)}.$$

□

Dieser Satz zeigt, dass man die Kontinuumsfunktion kennt, wenn man die Funktion $\beth : \mathrm{Card}\setminus\omega \to \mathrm{Card}\setminus\omega; \mu \mapsto \mu^{\mathrm{cf}(\mu)}$ kennt. ($\beth$ ist der dritte Buchstabe des hebräischen Alphabets und wird *gimel* gesprochen. Der zweite Buchstabe des hebräischen Alphabets ist $\beth$, gesprochen *beth*. Die $\beth$-Funktion ist definiert durch $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}$ und $\beth_\delta = \sup_{\alpha<\delta} \beth_\alpha$ für Limesordinalzahlen δ.) Ist nämlich κ regulär, so gilt $2^\kappa = \kappa^\kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$. Ist κ singulär, so ist 2^κ von der Form 2^λ für ein $\lambda < \kappa$ oder von der Form $\mu^{\mathrm{cf}(\mu)}$ für ein μ.

Lemma 17.4. *Sei $\kappa < \mathrm{cf}(\lambda)$. Dann gilt*

$$^\kappa\lambda = \bigcup_{\alpha\in\lambda} {}^\kappa\alpha \quad \textit{und} \quad \lambda^\kappa = \sum_{\alpha\in\lambda} |\alpha|^\kappa .$$

Beweis. Ist f eine Funktion von κ nach λ, so ist f wegen $\kappa < \mathrm{cf}(\lambda)$ nicht kofinal. Also existiert $\alpha \in \lambda$ mit $f \in {}^\kappa\alpha$. Das zeigt die erste Gleichung.

Die zweite Gleichung folgt nun wegen

$$\lambda^\kappa = \left| \bigcup_{\alpha\in\lambda} {}^\kappa\alpha \right| \leq \sum_{\alpha\in\lambda} |\alpha|^\kappa = \lambda \cdot \sup_{\alpha\in\lambda} |\alpha|^\kappa \leq \lambda \cdot \lambda^\kappa = \lambda^\kappa.$$

□

Lemma 17.5 (Hausdorffsche Rekurrenzformel)**.** *Für unendliche Kardinalzahlen κ und μ ist $(\mu^+)^\kappa = \mu^\kappa \cdot \mu^+$.*

Beweis. Ist $\kappa < \mu^+$, so ist so ist $\kappa < \mathrm{cf}(\mu^+) = \mu^+$ und somit, nach Lemma 17.4,

$$(\mu^+)^\kappa = \sum_{\alpha\in\mu^+} |\alpha|^\kappa \leq \mu^+ \cdot \mu^\kappa \leq \mu^+ \cdot (\mu^+)^\kappa = (\mu^+)^\kappa.$$

Ist $\kappa \geq \mu^+$, so gilt $(\mu^+)^\kappa = 2^\kappa$ und $\mu^\kappa = 2^\kappa > \kappa \geq \mu^+$. Damit ist $\mu^\kappa \cdot \mu^+ = 2^\kappa = (\mu^+)^\kappa$. □

Lemma 17.6. *Sei λ eine Limeskardinalzahl und $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \kappa$. Dann ist*

$$\lambda^\kappa = \left(\sup_{\mu<\lambda} \mu^\kappa \right)^{\mathrm{cf}(\lambda)}.$$

Beweis. Sei $\lambda = \sum_{i\in \mathrm{cf}(\lambda)} \lambda_i$ mit $2 \leq \lambda_i < \lambda$ für alle $i \in \mathrm{cf}(\lambda)$. Dann gilt

$$\lambda^\kappa = \left(\sum_{i\in\mathrm{cf}(\lambda)} \lambda_i\right)^\kappa \leq \left(\prod_{i\in\mathrm{cf}(\lambda)} \lambda_i\right)^\kappa = \prod_{i\in\mathrm{cf}(\lambda)} \lambda_i^\kappa$$
$$\leq \prod_{i\in\mathrm{cf}(\lambda)} \left(\sup_{\mu<\lambda} \mu^\kappa\right) = \left(\sup_{\mu<\lambda} \mu^\kappa\right)^{\mathrm{cf}(\lambda)} \leq (\lambda^\kappa)^{\mathrm{cf}(\lambda)} = \lambda^\kappa.$$

□

Satz 17.7 (Induktive Berechnung von λ^κ)**.** *Seien κ und λ unendliche Kardinalzahlen.*

(1) *Ist $\lambda \leq \kappa$, so ist $\lambda^\kappa = 2^\kappa$.*
(2) *Existiert $\mu < \lambda$ mit $\lambda \leq \mu^\kappa$, so ist $\lambda^\kappa = \mu^\kappa$.*
(3) *Ist $\kappa < \mathrm{cf}(\lambda)$ und $\mu^\kappa < \lambda$ für alle $\mu < \lambda$, so ist $\lambda^\kappa = \lambda$.*
(4) *Ist $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \kappa < \lambda$ und $\mu^\kappa < \lambda$ für alle $\mu < \lambda$, so ist $\lambda^\kappa = \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}$.*

Beweis. (1) kennen wir bereits. (2) gilt wegen $\mu^\kappa \leq \lambda^\kappa \leq (\mu^\kappa)^\kappa = \mu^\kappa$.

Für (3) betrachten wir zunächst den Fall, dass λ von der Form μ^+ ist. Nach Lemma 17.5 ist

$$\lambda^\kappa = (\mu^+)^\kappa = \mu^+ \cdot \mu^\kappa = \mu^+ = \lambda.$$

Ist λ eine Limeskardinalzahl, so ist nach Voraussetzung $\lambda = \sup_{\mu<\lambda} \mu^\kappa$. Nach Lemma 17.4 gilt

$$\lambda \leq \lambda^\kappa = \sum_{\alpha\in\lambda} |\alpha|^\kappa \leq \lambda \cdot \lambda = \lambda.$$

Für (4) stellen wir zunächst fest, dass λ wegen $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \kappa < \lambda$ eine Limeskardinalzahl ist. Wie im Beweis von (3) gilt $\lambda = \sup_{\mu<\lambda} \mu^\kappa$. Nach Lemma 17.6 ist $\lambda^\kappa = \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}$. □

Korollar 17.8. *Seien κ und λ unendliche Kardinalzahlen. Dann hat die Potenz λ^κ die Werte 2^κ oder λ oder es existiert eine Kardinalzahl μ mit $\mathrm{cf}(\mu) \leq \kappa < \mu \leq \lambda$, so dass $\lambda^\kappa = \mu^{\mathrm{cf}(\mu)}$ ist.*

Beweis. Angenommen nicht. Seien λ und κ Kardinalzahlen, für die Aussage des Korollars nicht stimmt. Dabei sei λ minimal gewählt.

Da die vier Fälle in Satz 17.2 eine vollständige Fallunterscheidung bilden und die Fälle (1), (3) und (4) nach Wahl von κ und λ ausscheiden, trifft (2) zu. Sei μ wie in (2) garantiert.

Dann ist $\mu^\kappa \neq 2^\kappa$. Wegen $\mu < \lambda$ ist $\mu^\kappa \neq \mu$. Da λ minimal für ein Gegenbeispiel zur Aussage des Korollars gewählt war, ist $\lambda^\kappa = \mu^\kappa$ von der Form $\nu^{\mathrm{cf}(\nu)}$ für eine Kardinalzahl $\nu \leq \mu$ mit $\mathrm{cf}(\nu) \leq \kappa < \nu \leq \mu < \lambda$. Ein Widerspruch zur Wahl von κ und λ. □

Korollar 17.9. *Unter GCH gilt für unendliche Kardinalzahlen κ und λ*

$$\lambda^\kappa = \begin{cases} \lambda, \text{ falls } \kappa < \mathrm{cf}(\lambda), \\ \lambda^+, \text{ falls } \mathrm{cf}(\lambda) \leq \kappa < \lambda \text{ und} \\ \kappa^+, \text{ falls } \lambda \leq \kappa. \end{cases}$$

Beweis. Ist $\kappa < \mathrm{cf}(\lambda)$, so unterscheiden wir zwei Fälle: Gilt für alle $\mu < \lambda$ die Ungleichung $\mu^\kappa < \lambda$, so gilt nach Satz 17.7 (3) auch ohne GCH $\lambda^\kappa = \lambda$. Gibt es ein $\mu < \lambda$ mit $\mu^\kappa \geq \lambda$, so gibt es auch ein $\mu < \lambda$ mit $\kappa \leq \mu$ und $\lambda \leq \mu^\kappa$. Wegen GCH gilt $\lambda \leq \mu^\kappa \leq \mu^\mu = 2^\mu = \mu^+$. Wegen $\mu < \lambda$ folgt $\lambda = \mu^\kappa = \mu^+$ und $\lambda^\kappa = (\mu^\kappa)^\kappa = \mu^\kappa = \lambda$. so ist $\mu^\kappa = \lambda^\kappa$ nach Satz 17.7 (2).

Ist $\kappa \geq \lambda$, so gilt nach Satz 17.7 $\lambda^\kappa = 2^\kappa$. Unter GCH ist damit $\lambda^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+$.

Sei nun $\mathrm{cf}(\lambda) \leq \kappa < \lambda$. Nach Korollar 16.8 b) gilt $\lambda < \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}$. Wegen GCH gilt

$$\lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} \leq \lambda^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+.$$

Das zeigt $\lambda^+ = \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)}$. Es gilt daher $\lambda^+ = \lambda^{\mathrm{cf}(\lambda)} \leq \lambda^\kappa \leq \lambda^\lambda = \lambda^+$, also $\lambda^\kappa = \lambda^+$. □

18. Filter und Ultrafilter

Filter sind kombinatorische Objekte, die in der mengentheoretischen Topologie und in der Modelltheorie eine große Rolle spielen.

Definition 18.1. Sei X eine Menge. $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *Filter* auf X, falls gilt:

(1) $X \in F$
(2) Ist $a \in F$ und $a \subseteq b \subseteq X$, so gilt $b \in F$.
(3) Sind $a, b \in F$, so ist $a \cap b \in F$.

F ist ein *echter* Filter, falls $\emptyset$ kein Element von F ist. F ist ein *Ultrafilter*, falls F echt ist und für alle $a \subseteq X$ entweder a oder $X \setminus a$ ein Element von F ist.

$I \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt Ideal, falls gilt:

(1) $\emptyset \in I$
(2) Ist $a \in I$ und $b \subseteq a$, so gilt $b \in I$.
(3) Sind $a, b \in I$, so ist $a \cup b \in I$.

Ein Ideal I auf X ist *echt*, falls $X \notin I$.

Übung 18.1. *Für $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ sei $S^* = \{X \setminus A : A \in S\}$*
Zeige: $F \subseteq \mathcal{P}(X)$ ist genau dann ein Filter, wenn F^* ein Ideal auf X ist.

Ist F ein Filter auf X, so heißt F^* das zu F *duale* Ideal. Umgekehrt ist für ein Ideal I auf X der Filter I^* der zu I duale Filter. Alle Aussagen, die wir über Filter beweisen, lassen sich mittels Dualisierung leicht in Aussagen über Ideale übersetzen.

Lemma 18.2. *Für jeden Filter F auf X und alle $a, b \subseteq X$ gilt*

$$a \in F \wedge b \in F \quad \Leftrightarrow \quad a \cap b \in F$$

und

$$a \in F \vee b \in F \quad \Rightarrow \quad a \cup b \in F.$$

Ist F echt, so gilt außerdem

$$a \in F \quad \Rightarrow \quad X \setminus a \notin F.$$

Ist F ein Ultrafilter, so gilt

$$a \in F \quad \Leftrightarrow \quad X \setminus a \notin F.$$

Übung 18.2. *Sei X eine feste Menge. Für alle $a \subseteq X$ sei $-a := X \setminus a$. Die Struktur $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, -, \emptyset, X)$ ist eine* Boolesche Algebra. *Man beachte, dass $2 = \{\emptyset, 1\} = \mathcal{P}(1)$ damit auch eine Boolesche Algebra ist (wenn auch eine sehr einfache).*

Zeige: Eine Abbildung $h : \mathcal{P}(X) \to 2$ ist genau dann ein Homomorphismus (bzgl. der Operationen $\cup$, $\cap$, $-$ und den Konstanten $\emptyset$ und X bzw. 1), wenn $h^{-1}(1)$ ein Ulltrafilter ist. Damit entsprechen die Ultrafilter auf X genau den Homomorphismen von $\mathcal{P}(X)$ nach 2.

Definition und Lemma 18.3. *a) Sei $a \subseteq X$. Dann heißt*

$$F := \{b \subseteq X : a \subseteq b\}$$

der von a erzeugte Hauptfilter. *F ist genau dann echt, wenn $a \neq \emptyset$ gilt. F ist genau dann ein Ultrafilter, wenn a einelementig ist. Ein Filter heißt* frei, *wenn er nicht Hauptfilter ist.*

b) Sei $x \in \mathbb{R}$.

$$F := \{U \subseteq \mathbb{R} : \exists \varepsilon > 0((x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U)\}$$

ist der Umgebungsfilter *von x. Er ist frei und echt.*

c) Ist X unendlich, so ist

$$F := \{a \subseteq X : |X \setminus a| < \aleph_0\},$$

der Fréchet-Filter *auf X, ein echter, freier Filter, der kein Ultrafilter ist.*

Lemma 18.4. *Sei $E \subseteq \mathcal{P}(X)$, Dann ist*

$$F := \{a \subseteq X : \text{ es gibt } n \in \omega \text{ und } e_1, \ldots, e_n \in E \text{ mit } e_1 \cap \cdots \cap e_n \subseteq a\}$$

der kleinste Filter G auf X, der E umfasst. F heißt der von E erzeugte Filter auf X. E heißt Basis *von F. F ist genau dann echt, wenn E die* endliche Durchschnittseigenschaft *hat, d.h., wenn für alle $n \in \omega$ und alle $e_1, \ldots, e_n \in E$ gilt:*

$$e_1 \cap \cdots \cap e_n \neq \emptyset$$

Satz 18.5. *Für jeden Filter F sind äquivalent:*

(1) *F ist Ultrafilter.*
(2) *F ist Primfilter, d.h., F ist echt und aus $a \cup b \in F$ folgt $a \in F$ oder $b \in F$.*
(3) *F ist maximaler echter Filter.*

Beweis. (1)⇒(2): Sei F Filter auf X und seien $a, b \subseteq X$. Ist $a \cup b \in F$, so gilt $X \setminus (a \cup b) \notin F$, da F echt ist. Anders geschrieben gilt $(X \setminus a) \cap (X \setminus b) \notin F$. Damit ist $X \setminus a \notin F$ oder $X \setminus b \notin F$. Da F Ultrafilter ist, folgt daraus $a \in F$ oder $b \in F$.

(2)⇒(3): Sei $a \notin F$. Sei G der von $F \cup \{a\}$ erzeugte Filter. Wir zeigen, dass G nicht echt ist. Es gilt $a \cup (X \setminus a) = X \in F$. Da F prim ist und a nicht enthält, ist $X \setminus a \in F$. Damit gilt $a, X \setminus a \in G$. Damit ist auch $\emptyset = a \cap (X \setminus a) \in G$.

(3)⇒(1): Sei $a \notin F$. Wir zeigen $X \setminus a \in F$. Da F ein maximaler echter Filter mit $a \notin F$ ist, ist der von $F \cup \{a\}$ erzeugte Filter unecht. Also existieren $n \in \omega$ und $e_1, \ldots, e_n \in F \cup \{a\}$ mit $e_1 \cap \cdots \cap e_n = \emptyset$. Da F unter endlichen Durchschnitten abgeschlossen ist, folgt die Existenz von $f \in F$ mit $f \cap a = \emptyset$. Es gilt $f \subseteq X \setminus a$ und damit $X \setminus a \in F$. □

Satz 18.6. *Jede Familie $E \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit der endlichen Durchschnittseigenschaft lässt sich zu einem Ultrafilter auf X erweitern. Insbesondere ist jeder echte Filter in einem Ultrafilter enthalten.*

Beweis. Sei G der von E erzeugte Filter auf X. G ist echt. Nach dem Zornschen Lemma existiert ein maximaler echter Filter F, der G umfasst. F leistet das Gewünschte. □

Korollar 18.7. *Auf jeder unendlichen Menge gibt es einen freien Ultrafilter.*

Beweis. Sei X unendlich und F der Fréchet-Filter auf X. Sei G ein Ultrafilter der F erweitert. Offenbar gilt $\bigcap G \subseteq \bigcap F = \emptyset$. Damit kann G kein Hauptfilter sein, es sei denn, der von $\{\emptyset\}$ erzeugte. Letzteres widerspricht aber der Tatsache, dass G echt ist. □

Definition 18.8. Ein Filter F heißt *κ-vollständig* für $\kappa \in \mathrm{Card}$, wenn für alle $A \subseteq F$ mit $|A| < \kappa$ gilt: $\bigcap A \in F$.

Jeder Ultrafilter ist $\aleph_0$-vollständig.

Übung 18.3. *Ein freier, κ-vollständiger Ultrafilter enthält keine Mengen der Mächtigkeit $< \kappa$.*

κ-vollständige Ultrafilter hängen mit κ-vollständigen Maßen zusammen:

Sei X eine Menge. Eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ heißt (endlich additives) *Maß* auf X, wenn gilt

(1) $\mu(\emptyset) = 0$ und $\mu(X) = 1$

(2) $A, B \subseteq X \wedge A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Ein Maß μ auf X heißt κ-additiv, wenn für jede Familie $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ paarweise disjunkter Mengen mit $|A| < \kappa$ gilt:

$$\mu(\bigcup A) = \sum_{a \in A} \mu(a).$$

$\aleph_1$-additive Maße heißen auch σ-addititiv.

Übung 18.4. *Sei X eine Menge und $F \subseteq \mathcal{P}(X)$. F ist genau dann ein κ-vollständiger Ultrafilter, wenn die Abbildung $\mu_F : \mathcal{P}(X) \to 2$ mit $\mu_F^{-1}(1) = F$ ein κ-additives Maß auf X ist.*

Definition 18.9. Eine überabzählbare Kardinalzahl κ heißt *messbar*, wenn es auf κ einen freien, κ-vollständigen Ultrafilter gibt.

Die Existenz messbarer Kardinalzahlen lässt sich in ZFC weder beweisen noch widerlegen. Sie hängt zusammen mit der Existenz eines σ-additiven Maßes auf $\mathbb{R}$ bzw. auf dem Einheitsintervall. Messbare Kardinalzahlen sind stark unerreichbar.

19. Messbare Kardinalzahlen und Masse auf $\mathbb{R}$

Definition 19.1. Ein Maß μ auf einer Menge X heißt nichttrivial, wenn für alle $x \in X$ gilt: $\mu(\{x\}) = 0$.

Banachs *Maßproblem* ist folgende Frage:

Gibt es ein nichttriviales, σ-additives Maß μ auf $\mathbb{R}$?

Wir haben bereits gesehen, dass es kein translationsinvariantes Maß auf $\mathbb{R}$ gibt, das das Lebesguesche Maß fortsetzt. (Oder anders ausgedrückt, $\mathbb{R}$ hat Teilmengen, die nicht Lebesgue-messbar sind.) Im Falle des Maßproblems lässt man die Translationsinvarianz weg, und auch die Forderung, dass das Maß eines Intervalls seine Länge sein sollte. Außerdem nehmen die zugelassenen Maße keine Werte > 1 an. Letzteres ist aber nicht wesentlich, solange man nur fordert, dass das Einheitsintervall ein beschränktes Maß hat.

In jedem Falle spielt die geometrische oder algebraische Struktur von $\mathbb{R}$ für das Maßproblem keine Rolle. Damit lässt sich das Maßproblem auch wie folgt formulieren:

Gibt es ein nichttriviales, σ-additives Maß μ auf $2^{\aleph_0}$?

Lemma 19.2. *Sei X eine Menge und μ ein σ-additives Maß auf X. Sei $A \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine überabzählbare Familie von Mengen vom Maß > 0. Dann gibt es $a, b \in A$ mit $a \neq b$ und $\mu(a \cap b) > 0$.*

Beweis. Angenommen nicht. Für alle $n \in \omega$ sei

$$A_n := \{a \in A : \mu(a) > \frac{1}{2^n}\}.$$

Dann ist $A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$. Damit gibt es ein $n \in \omega$, so dass A_n unendlich ist. Indem wir gegebenenfalls Elemente von A_n entfernen, können wir annehmen, dass A_n abzählbar unendlich ist. Nachdem wir eventuell die Elemente von A_n um gewisse Mengen vom Maß 0 abgeändert haben, können wir annehmen, dass die Elemente von A_n paarweise disjunkt sind.

Wegen der σ-Additivität von μ ist

$$1 \geq \mu(\bigcup A_n) = \sum_{a \in A_n} \mu(a) \geq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \infty,$$

ein Widerspruch. □

Lemma 19.3. *Sei $\kappa > \aleph_0$ die kleinste Kardinalzahl, auf der es ein nichttriviales, σ-additives Maß gibt. Dann ist jedes σ-additive Maß auf κ sogar κ-additiv.*

Beweis. Sei μ ein σ-additives Maß auf κ. Angenommen, es gibt eine Kardinalzahl $\lambda < \kappa$ und eine Familie $A = \{a_\alpha : \alpha < \lambda\}$ paarweise disjunkter Teilmengen von κ, so dass

$$\mu(\bigcup A) \neq \sum_{\alpha<\lambda} \mu(a_\alpha)$$

gilt. Da μ σ-additiv ist, gilt $\lambda < \aleph_0$

Nach Lemma 19.2 haben nur abzählbar viele Elemente von A ein Maß > 0. Nachdem wir diese Elemente eventuell entfernt haben, nehmen wir an, dass alle Elemente von A das Maß 0 haben. Nach unserer Annahme gilt $\mu(\bigcup_{\alpha\in\lambda} a_\alpha) > 0$.

Wir definieren ein Maß $\overline{\mu}$ auf λ durch

$$\overline{\mu}(b) := \frac{\mu(\bigcup_{\alpha\in b} a_\alpha)}{\mu(\bigcup_{\alpha\in\lambda} a_\alpha)}$$

für alle $b \subseteq \lambda$. Wie man leicht nachrechnet, ist $\overline{\mu}$ ein nichttriviales, σ-additives Maß auf λ. Das widerspricht der Minimalität von κ. □

Dieses Lemma motiviert folgende Definition:

Definition 19.4. Eine Kardinalzahl $\kappa > \aleph_0$ heißt *reellwertig messbar*, wenn es auf κ ein nichttriviales, κ-additives Maß gibt.

Der Grund, in dieser Definition anstelle von σ-Additivität κ-Additivität zu fordern, ist folgender:

Übung 19.1. *Sei μ ein nichttriviales, σ-additives Maß auf einer Kardinalzahl κ. Dann gibt es auf jeder Kardinalzahl $\lambda > \kappa$ ein nichttriviales, σ-additives Maß.*

Aus Lemma 19.3 folgt sofort

Korollar 19.5. *Wenn es ein nichttriviales, σ-additives Maß auf $\mathbb{R}$ gibt, wenn also die Antwort auf das Maßproblem positiv ist, so gibt es eine reellwertig messbare Kardinalzahl $\leq 2^{\aleph_0}$.*

Satz 19.6. *Jede reellwertig messbare Kardinalzahl κ ist schwach unerreichbar.*

Der Beweis dieses Satzes benutzt die Existenz einer *Ulam-Matrix*, benannt nach Stanisław Ulam, der die wesentlichen Resultate über das Maßproblem bewiesen hat.

Lemma 19.7. *Für jede unendliche Kardinalzahl λ existiert eine Familie*

$$\{A^\xi_\alpha : \alpha < \lambda^+ \wedge \xi < \lambda\} \subseteq \mathcal{P}(\lambda^+),$$

so dass gilt:

(1) $A^\xi_\alpha \cap A^\xi_\beta = \emptyset$ *für alle* $\alpha, \beta \in \lambda^+$ *mit* $\alpha \neq \beta$ *und alle* $\xi < \lambda$, *und*
(2) $|\lambda^+ \setminus \bigcup_{\xi\in\lambda} A^\xi_\alpha| \leq \lambda$ *für alle* $\alpha \in \lambda^+$.

Beweis. Für jedes $\eta \in \lambda^+$ sei $f_\eta : \lambda \to \eta + 1$ surjektiv. Für jedes $\alpha \in \lambda^+$ und jedes $\xi < \lambda$ sei

$$A^\xi_\alpha = \{\eta \in \lambda^+ : f_\eta(\xi) = \alpha\}.$$

Mit dieser Definition ist (1) offenbar erfüllt.

Für (2) sei $\alpha \in \lambda^+$ und

$$\eta \in \lambda^+ \setminus \bigcup_{\xi<\lambda} A^\xi_\alpha.$$

Dann gilt $f_\eta(\xi) \neq \alpha$ für alle $\xi < \lambda$. Da $f_\eta : \lambda \to \eta + 1$ surjektiv ist, folgt daraus $\eta < \alpha$. Damit ist

$$\lambda^+ \setminus \bigcup_{\xi<\lambda} A^\xi_\alpha \subseteq \alpha < \lambda^+.$$

Das zeigt (2). □

Lemma 19.8. *Sei λ eine unendliche Kardinalzahl, $\kappa = \lambda^+$ und F ein κ-vollständiger Filter auf κ, so dass das zu F duale Ideal I alle einelementigen Teilmengen von κ enthält. Sei $I^+ = \{A \subseteq \kappa : A \notin I\}$. Dann existiert eine Familie $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ von paarweise disjunkten Teilmengen von κ, die alle in I^+ liegen.*

Beweis. Sei $(A^\xi_\alpha)_{\alpha\in\lambda^+,\xi\in\lambda}$ eine Ulam-Matrix wie in Lemma 19.7. Nach Eigenschaft (2) der Ulam-Matrix gilt für alle $\alpha < \kappa$ die Ungleichung $\left|\kappa \setminus \bigcup_{\xi\in\lambda} A^\xi_\alpha\right| < \kappa$. Da F κ-vollständig ist, ist I unter Vereinigung von weniger als κ-vielen Mengen abgeschlossen. Da I alle einelementigen Teilmengen von κ enthält, folgt, dass I auch für alle $\alpha < \kappa$ die Menge $\kappa \setminus \bigcup_{\xi\in\lambda} A^\xi_\alpha$ enthält. Also liegen alle Mengen der Form $\bigcup_{\xi\in\lambda} A^\xi_\alpha$, $\alpha < \kappa$, in F und damit insbesondere nicht in I. Da I unter Vereinigungen von weniger als κ-vielen Mengen abgeschlossen ist, gibt es für jedes $\alpha < \kappa$ ein $\xi_\alpha < \lambda$, so dass $A^{\xi_\alpha}_\alpha$ nicht in I liegt.

Da κ regulär ist, existiert ein $\xi < \lambda$, so dass $B = \{\alpha < \kappa : \xi_\alpha = \xi\}$ die Mächtigkeit κ hat. Nun ist $(A^\xi_\alpha)_{\alpha\in B}$ eine Familie von paarweise disjunkten Mengen, deren Komplemente nicht in F liegen. □

Beweis von Satz 19.6. Sei μ ein nichttriviales, κ-additives Maß auf κ.

Wir zeigen zunächst, dass κ regulär ist. Angenommen nicht. Sei $\kappa = \bigcup_{i\in\mathrm{cf}(\kappa)} a_i$ mit $|a_i| < \kappa$ für jedes $i \in \mathrm{cf}(\kappa)$. Wegen der κ-Additivität von μ und da alle Einermengen das Maß 0 haben, gilt $\mu(a_i) = 0$ für alle $i \in \mathrm{cf}(\kappa)$.

Wiederum wegen der κ-Additivität ist

$$\mu(\kappa) \leq \sum_{i\in\mathrm{cf}(\kappa)} \mu(a_i) = 0,$$

ein Widerspruch. Damit ist κ regulär.

Es bleibt zu zeigen, dass κ eine Limeskardinalzahl ist. Angenommen nicht. Dann existiert eine Kardinalzahl λ mit $\kappa = \lambda^+$. $F = \{X \subseteq \kappa : \mu(X) = 1\} = \mu^{-1}(1)$ ist ein κ-vollständiger Filter, dessen duales Ideal $I = \mu^{-1}(0)$ alle einelementigen Teilmengen von κ enthält. Nach Lemma 19.8 existiert eine Familie $(X_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ von paarweise disjunkten Elementen von I^+.

Mit anderen Worten, die X_α haben alle ein Maß > 0. Das Widerspricht aber Lemma 19.2, da κ überabzählbar ist. □

Dieses Lemma zusammen mit Korollar 19.5 zeigt, dass eine positive Antwort auf das Maßproblem die Existenz einer schwach unerreichbaren Kardinalzahl $\leq 2^{\aleph_0}$ nach sich zieht. Die Existenz einer schwach unerreichbaren Kardinalzahl $\leq 2^{\aleph_0}$ stellt eine massive Verletzung der Kontinuumshypothese dar.

Wir haben bereits bemerkt, dass nach einem Resultat von Gödel ZFC+CH widerspruchsfrei ist, falls ZF widerspruchsfrei ist.

Korollar 19.9. *Wenn ZF widerspruchsfrei ist, so lässt sich die Existenz eines nichttrivialen, σ-additiven Maßes auf $\mathbb{R}$ in ZFC nicht beweisen.*

Da die Widerspruchsfreiheit von ZFC+„es gibt eine schwach unerreichbare Kardinalzahl“ nicht aus der Widerspruchsfreiheit von ZFC folgt, lässt sich auch die Widerspruchsfreiheit von ZFC+„es gibt ein nichttriviales, σ-additives Maß auf $\mathbb{R}$“ nicht aus der Widerspruchsfreiheit von ZFC ableiten.

Definition 19.10. Sei μ ein Maß auf κ. Eine Menge $a \subseteq \kappa$ mit $\mu(a) > 0$ ist ein *Atom* für μ, wenn für alle $b \subseteq a$ gilt: $\mu(a) = \mu(b)$ oder $\mu(b) = 0$. Das Maß μ ist *atomlos*, wenn es keine Atome für μ gibt.

Man beachte, dass atomlose Maße nichttrivial sind.

Satz 19.11. *Sei $\kappa > \aleph_0$ eine Kardinalzahl. Angenommen, es gibt ein atomloses, κ-additives Maß μ auf κ. Dann gilt $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ und es gibt ein Maß auf $[0,1]$, das das Lebesguesche Maß erweitert.*

Wir zeigen nur, dass $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$ ist. Dazu benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 19.12. *Seien κ und μ wie in Satz 19.11.*

a) Für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $X \subseteq \kappa$ mit $\mu(X) > 0$ existiert $Y \subseteq X$ mit $0 < \mu(Y) < \varepsilon$.

b) Für alle $X \subseteq \kappa$ existiert $Y \subseteq X$ mit $\mu(Y) = \frac{1}{2} \cdot \mu(X)$.

Beweis. Für a) genügt es, eine fallende Folge $(X_n)_{n\in\omega}$ von Teilmengen von X zu konstruieren, so dass für alle $n \in \omega$ gilt: $0 < \mu(X_{n+1}) \leq \frac{1}{2} \cdot \mu(X_n)$. Wählt man dann n groß genug, so leistet $Y := X_n$ das Gewünschte.

Setze $X_0 := X$. Sei X_n bereits konstruiert mit $\mu(X_n) > 0$. Da μ atomlos ist, existiert eine Menge $M \subseteq X_n$ mit $0 < \mu(M) < \mu(X_n)$. Ist $\mu(M) \leq \frac{1}{2} \cdot \mu(X_n)$, so setze $X_{n+1} := M$. Sonst setze $X_{n+1} := X_n \setminus M$. Es ist klar, dass X_{n+1} das Gewünschte leistet.

Für b) wählen wir eine maximale Folge $(X_\alpha)_{\alpha\in\delta}$ von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für alle $\alpha \in \delta$ gilt $\mu(X_\alpha) \leq \frac{1}{2} \cdot \mu(X)$.
(2) Für alle $\alpha, \beta \in \delta$ mit $\alpha < \beta$ gilt $X_\alpha \subseteq X_\beta$, sowie $\mu(X_\alpha) < \mu(X_\beta)$.

Die Folge konstruieren wir wie folgt:

Ist X_α bereits gewählt und gilt $\mu(X_\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \mu(X)$, so sind wir fertig. In diesem Falle setzen wir $\delta := \alpha + 1$. Ist $\mu(X_\alpha) < \frac{1}{2} \cdot \mu(X)$, so existiert wegen a) eine Menge $X_{\alpha+1} \subseteq X$ mit $X_\alpha \subseteq X_{\alpha+1}$ und $\mu(X_\alpha) < \mu(X_{\alpha+1}) \leq \frac{1}{2} \cdot \mu(X)$. Ist α eine Limesordinalzahl und X_γ gewählt für alle $\gamma \in \alpha$, so setzen wir $X_\alpha := \bigcap_{\gamma\in\alpha} X_\gamma$.

Es gilt $\delta < \aleph_1$. Sonst wäre $\{X_{\alpha+1} \setminus X_\alpha : \alpha + 1 < \delta\}$ eine überabzählbare Familie paarweise disjunkter Mengen von positivem Maß, ein Widerspruch zu Lemma 19.2. □

Beweis von Satz 19.11. Wir zeigen, dass das Maß μ nicht $(2^{\aleph_0})^+$-additiv ist. Da μ κ-additiv ist, folgt daraus $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$.

Um zu zeigen, dass μ nicht $(2^{\aleph_0})^+$-additiv ist, konstruieren wir eine disjunkte Familie von $2^{\aleph_0}$ Mengen vom Maß 0, deren Vereinigung ganz κ ist, also das Maß 1 hat.

Die disjunkte Familie von Nullmengen wird die Form $(X_f)_{f\in{}^\omega 2}$ haben. Zunächst konstruieren wir Approximationen X_σ, $\sigma \in {}^{<\omega}2$, mit folgenden Eigenschaften:

(1) $X_\emptyset = \kappa$
(2) Für alle $\sigma \in {}^{<\omega}2$ ist $\{X_{\sigma^\frown 0}, X_{\sigma^\frown 1}\}$ eine Partition von X_σ.
(3) Für alle $n \in \omega$ und alle $\sigma \in {}^n2$ ist $\mu(X_\sigma) = \frac{1}{2^n}$.

Ist X_σ bereits gewählt für ein $\sigma \in {}^{<\omega}2$, so kann man $X_{\sigma^\frown 0}$ und $X_{\sigma^\frown 1}$ leicht mit Hilfe von Lemma 19.12 b) wählen.

Für jedes $f \in {}^\omega 2$ setze $X_f := \bigcap_{n\in\omega} X_{f\restriction n}$. Wegen (3) ist jedes X_f eine Nullmenge. Wegen (2) gilt für alle $f, g \in {}^\omega 2$ mit $f \neq g$: $X_f \cap X_g = \emptyset$. Wegen (1) und (2) ist für jedes $n \in \omega$ die Menge $\{X_\sigma : \sigma \in {}^n2\}$ eine Partition von X. Damit ist

$$\bigcup_{f\in{}^\omega 2} X_f = \bigcap_{n\in\omega} \left(\bigcup_{\sigma\in{}^n 2} X_\sigma \right) = \kappa.$$

Das zeigt, dass μ nicht $(2^{\aleph_0})^+$-additiv ist. □

Lemma 19.13. *Sei $\kappa > \aleph_0$ eine Kardinalzahl und μ ein nichttriviales κ-additives Maß auf κ. Hat μ ein Atom a, so ist κ messbar.*

Beweis. Es genügt, einen κ-vollständigen Ultrafilter auf irgendeiner Menge der Mächtigkeit κ anzugeben. Ist a ein Atom für μ, so gilt $\mu(a) > 0$. Wegen der κ-Additivität von μ ist $|a| = \kappa$. $F := \{b \subseteq a : \mu(b) > 0\}$ ist ein κ-vollständiger, freier Ultrafilter auf a. □

Lemma 19.14. *Ist κ eine messbare Kardinalzahl, so ist κ stark unerreichbar.*

Beweis. Da messbare Kardinalzahlen auch reellwertig messbar sind, müssen wir wegen Lemma 19.6 nur noch zeigen, dass für alle $\lambda < \kappa$ gilt: $2^\lambda < \kappa$.

Angenommen nicht. Dann existiert eine Kardinalzahl $\lambda < \kappa$, so dass es eine Folge $(f_i)_{i\in\kappa}$ paarweise verschiedener Funktionen von λ nach 2 gibt. Sei F ein κ-vollständiger, freier Ultrafilter auf κ. Für jedes $\alpha \in \lambda$ ist entweder $A^0_\alpha = \{i \in \kappa : f_i(\alpha) = 0\}$ oder $A^1_\alpha = \{i \in \kappa : f_i(\alpha) = 1\}$ ein Element von F. Wähle $f(\alpha) \in 2$ so, dass $A^{f(\alpha)}_\alpha \in F$ gilt. Wegen der κ-Vollständigkeit von F ist $A = \bigcap_{\alpha<\lambda} A^{f(\alpha)}_\alpha \in F$.

Sei $i \in A$ und $\alpha \in \lambda$. Dann gilt offenbar $f_i(\alpha) = f(\alpha)$. Es folgt, dass A höchstens ein Element hat. Ein Widerspruch zur Freiheit von F. □

Aus diesem Lemma folgt sofort, dass messbare Kardinalzahlen sehr viel größer als $2^{\aleph_0}$ sind. Mit Hilfe von Satz 19.11 sieht man, dass für jede reellwertig messbare Kardinalzahl κ genau eine der beiden folgenden Aussagen zutrifft:

(1) Es gilt $\kappa \leq 2^{\aleph_0}$, κ ist schwach unerreichbar und jedes nichtriviale, κ-additive Maß auf κ ist atomlos.
(2) Es gilt $\kappa > 2^{\aleph_0}$, κ ist messbar (und damit stark unerreichbar) und jedes nichttriviale, κ-additive Maß auf κ hat ein Atom.

Solovay hat gezeigt, dass ZFC zusammen mit der Aussage „es gibt eine reellwertig messbare Kardinalzahl $\leq 2^{\aleph_0}$“ genau dann widerspruchsfrei ist, wenn ZFC zusammen mit der Aussage „es gibt eine messbare Kardinalzahl“ widerspruchsfrei ist.

Damit ergibt sich folgendes Bild:

- Wenn es ein nichttriviales, σ-additives Maß auf $\mathbb{R}$ gibt, so existiert eine reellwertig messbare Kardinalzahl $\leq 2^{\aleph_0}$. Insbesondere ist dann CH falsch und es gibt sogar ein nichttriviales, σ-additives Maß auf $\mathbb{R}$, das das Lebesguesche Maß fortsetzt.
- ZFC zusammen mit der Aussage „es gibt ein nichttriviales, σ-additives Maß auf $\mathbb{R}$“ ist genau dann widerspruchsfrei, wenn ZFC zusammen mit der Aussage „es gibt eine messbare Kardinalzahl“ widerspruchsfrei ist.

20. Clubs und stationäre Mengen

Definition 20.1. Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Eine Menge $C \subseteq \kappa$ ist *abgeschlossen*, falls für alle $D \subseteq C$, die nicht in κ kofinal sind, $\sup D \in C$ gilt. $C \subseteq \kappa$ heißt *club* (*closed and unbounded*), falls C abgeschlossen und kofinal in κ ist.

$S \subseteq \kappa$ ist *stationär*, falls S jede club Teilmenge von κ schneidet.

Lemma 20.2. *Sei $\kappa > \aleph_0$ eine reguläre Kardinalzahl.*

a) Sei $\lambda < \kappa$ eine Kardinalzahl und $(C_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ ein Familie von club Teilmengen von κ. Dann ist $\bigcap_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ club in κ.

b) Sei $(C_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine Familie von club Teilmengen von κ. Dann ist der Diagonalschnitt

$$\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \left\{\beta < \kappa : \beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha\right\}$$

club in κ.

Beweis. a) Sei $D \subseteq \bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ beschränkt in κ. Dann ist $\sup D \in C_\alpha$ für alle $\alpha < \lambda$. Das zeigt die Abgeschlossenheit von $\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$. Sei nun $\gamma < \kappa$. Wähle eine Bijektion $\psi : \lambda \to \lambda \times \lambda$. Für jedes $\nu \in \lambda$ sei $\varphi(\nu)$ die erste Komponente von $\psi(\nu)$.

Da die C_α, $\alpha < \lambda$, kofinal in κ sind und κ regulär ist, existiert eine streng monoton wachsende Folge $(\gamma_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ in κ mit $\gamma \leq \gamma_0$, so dass für alle $\alpha < \lambda$ $\gamma_\alpha \in C_{\varphi(\alpha)}$ gilt. Da es für jedes $\beta < \lambda$ kofinal viele $\nu < \lambda$ mit $\varphi(\nu) = \beta$ gibt, ist $\sup_{\nu<\lambda} \gamma_\nu \in C_\alpha$ für alle $\alpha < \lambda$. Das zeigt die Kofinalität von $\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$.

b) Sei $D \subseteq \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ mit $\delta = \sup D < \kappa$. Wir können annehmen, dass D kein letztes Element hat. Für alle $\beta \in D$ is $\beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$. Damit ist $\sup(D \setminus \beta) \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$. Es gilt $\sup(D \setminus \beta) = \sup D$. Also ist $\sup D \in \bigcap_{\alpha<\sup D} C_\alpha$ und damit $\sup(D) \in \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$. Das zeigt die Abgeschlossenheit von $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$.

Sei nun $\gamma < \kappa$. Wir wählen eine streng monoton wachsende Folge $(\gamma_n)_{n\in\omega}$ in κ mit $\gamma_0 = \gamma$, so dass für alle $n \in \omega$ gilt:

$$\gamma_{n+1} \in \bigcap_{\alpha<\gamma_n} C_\alpha$$

Da κ regulär ist, ist $\beta = \sup_{n\in\omega} \gamma_n < \kappa$. Für alle $\alpha < \beta$ existiert $m \in \omega$ mit $\alpha < \gamma_m$. Es ist $\beta = \sup_{n\geq m} \gamma_n \in \bigcap_{\nu<\alpha} C_\nu$. Also ist $\beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha$ und damit $\beta \in \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$. Das zeigt, dass $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ club in κ ist. □

Definition 20.3. Sei κ eine reguläre, überabzählbare Kardinalzahl. Der *Club-Filter* auf κ ist der Filter, der von den club Teilmengen von κ erzeugt wird. Das zu diesem Filter duale Ideal ist das *nicht-stationäre Ideal*.

Ein Filter F auf κ heißt *normal*, wenn F unter Diagonalschnitten abgeschlossen ist.

Übung 20.1. *Zeige, dass jeder normale Filter auf einer überabzählbaren, regulären Kardinalzahl κ, der alle Komplemente von beschränkten Teilmengen von κ enthält, κ-vollständig ist.*

Korollar 20.4. *Sei κ eine überabzählbare, reguläre Kardinalzahl. Dann ist der Club-Filter auf κ ein normaler, κ-vollständiger Filter.*

Definition 20.5. Sei κ eine unendliche Kardinalzahl und $S \subseteq \kappa$. Eine Funktion $f : S \to \kappa$ heißt regressiv, falls für alle $\alpha \in S$ die Ungleichung $f(\alpha) < \alpha$ gilt.

Satz 20.6 (Fodors Lemma)**.** *Sei κ überabzählbar und regulär. Weiter sei F ein normaler Filter auf κ, $I = F^*$ und $S \in I^+ = \{A \subseteq \kappa : A \notin I\}$. Ist $f : S \to \kappa$ regressiv, so existiert $T \subseteq S$ mit $T \in I^+$, so dass f auf T konstant ist.*

Beweis. Angenommen, es gibt keine Menge in I^+, auf der f konstant ist. Für jedes $\alpha < \kappa$ gibt es dann eine Menge $C_\alpha \in F$, die zu $f^{-1}(\alpha)$ disjunkt ist. Sei $C = \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$. Da F normal ist, ist $C \in F$.

Wegen $S \in I^+$, gilt $S \cap C \neq 0$. Sei $\alpha \in S \cap C$. Nach Definition von C gilt dann $\alpha \in \bigcap \beta < \alpha C_\beta$. Da f regressiv ist, gilt $f(\alpha) < \alpha$. Damit ist $\alpha \in C_{f(\alpha)}$. Offenbar ist $\alpha \in f^{-1}(f(\alpha))$. $C(f(\alpha))$ ist aber disjunkt zu $f^{-1}(f(\alpha))$, ein Widerspruch. □

Man beachte, dass für den Club-Filter F auf κ und $I = F^*$, I^+ genau die Familie der stationären Teilmengen von κ ist. In diesem Spezialfall sagt Fodors Lemma also genau, dass jede regressive Funktion, die auf einer stationären Teilmenge von κ definiert ist, auf einer stationären Teilmenge von κ konstant ist.

Definition 20.7. Das kombinatorische Prinzip $\diamondsuit$ (gesprochen *diamond* oder *Karo*) ist die Aussage, dass es eine Folge $(S_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ gibt, so dass für jede Menge $X \subseteq \omega_1$ die Menge

$$\{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = S_\alpha\}$$

stationär in ω_1 ist. Die Folge $(S_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ ist eine $\diamondsuit$-*Folge*.

$\diamondsuit$ lässt sich in ZFC weder beweisen noch widerlegen. Das folgende Lemma zeigt, dass $\diamondsuit$ eine Verstärkung von CH ist.

Lemma 20.8. $\diamondsuit \Rightarrow$ CH

Beweis. Wir zeigen, dass es unter $\diamondsuit$ nur $\aleph_1$ Teilmengen von ω gibt. Sei nämlich $(S_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ eine $\diamondsuit$-Folge und $X \subseteq \omega$. Dann ist die Menge

$$\{\alpha < \omega_1 : X \cap \alpha = S_\alpha\}$$

stationär in ω_1. Da stationäre Mengen insbesondere kofinal sind, existiert $\alpha < \omega_1$ mit $X \cap \alpha = S_\alpha$ und $\alpha \geq \omega$. Nun ist $X = X \cap \alpha = S_\alpha$. Damit ist jede Teilmenge von ω von der Form S_α für ein $\alpha < \omega_1$. Also gilt $|\mathcal{P}(\omega)| = \aleph_1$. □

21. Das Suslinsche Problem

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass alle linearen Ordnungen $(L, <)$ mit folgenden Eigenschaften zu $(\mathbb{R}, <)$ isomorph sind:

(1) L ist *dicht*, d.h., zwischen je zwei verschiedenen Elementen von L liegt ein weiteres.
(2) L hat *keine Endpunkte*. Es gibt also weder ein erstes noch ein letztes Element.
(3) L is *vollständig*, d.h., jeder Dedekindsche Schnitt von L hat eine Schnittzahl.
(4) L ist *separabel*, d.h., es gibt eine abzählbare Menge $C \subseteq L$, so dass jedes nichtleere, offene Intervall in L ein Element von C enthält.

Definition 21.1. Eine lineare Ordnung $(L, <)$ erfüllt die *abzählbare Kettenbedingung* (oder auch *c.c.c.* für *countable chain condition*), falls jede Familie paarweise disjunkter, nichtleerer, offener Intervalle von L abzählbar ist.

Offenbar impliziert Separabilität die abzählbare Kettenbedingung. Das Suslinsche Problem ist nun die Frage, ob die oben genannten Eigenschaften einer linearen Ordnung immer noch die reellen Zahlen bis auf Isomorphie eindeutig charakterisieren, wenn man (4) ersetzt durch

(4)′ L ist c.c.c.

Die *Suslinsche Hypothese* (*SH*) ist die Aussage, dass jede lineare Ordnung, die (1)–(3) und (4)′ erfüllt, auch (4) erfüllt und damit isomorph zu den reellen Zahlen ist. Eine *Suslin-Gerade* ist ein Gegenbeispiel zur Suslinschen Hypothese, also eine lineare Ordnung, die (1)–(3) und die abzählbare Kettenbedingung erfüllt, aber nicht separabel ist. SH ist genau dann falsch, wenn es eine Suslin-Gerade gibt.

Wir werden zeigen, dass sich mit Hilfe des in Definition 20.7 eingeführten Prinzips $\diamondsuit$ eine Suslin-Gerade konstruieren lässt. Dabei benutzen wir den Zusammenhang zwischen Suslin-Geraden und sogenannten Suslin-Bäumen.

Definition 21.2. Ein Baum ist eine partiell geordnete Menge $(T, <)$, so dass für jedes $t \in T$ die Menge ${}_<t = \{s \in T : s < t\}$ durch $<$ wohlgeordnet ist. Die Ordinalzahl $\mathrm{otp}({}_<t)$ ist in diesem Fall die *Höhe* von t in T. Die Elemente eines Baumes werden oft Knoten genannt.

Sei $(T, <)$ ein Baum. Für jede Ordinalzahl α sei der *α-te Level* von T die Menge

$$\mathrm{Lev}_\alpha(T) = \{t \in T : \mathrm{otp}({}_<t) = \alpha\}.$$

Die Höhe $h(T)$ eines Baumes T sei das Supremum der Ordinalzahlen α, für die $\mathrm{Lev}_\alpha(T) \neq \emptyset$ ist. T ist ein κ-Baum für eine reguläre Kardinalzahl κ, falls T die Höhe κ hat und für alle $\alpha < \kappa$ gilt: $|\mathrm{Lev}_\alpha(T)| < \kappa$

Eine Teilmenge Z eines Baumes T ist ein *Zweig*, falls Z linear geordnet ist und für alle $t \in Z$ gilt: ${}_<t \subseteq Z$.

Man kann zeigen, dass es einen Baum der Höhe ω_1 gibt, in dem jeder Level eine Mächtigkeit $< \aleph_1$ hat und der keinen überabzählbaren Zweig hat. Ein solcher Baum heißt *Aronszajn-Baum*.

Ein Baum der Höhe ω_1, der keine überabzählbaren Zweige und auch keine überabzählbaren Mengen paarweise unvergleichbarer Elemente hat, heißt *Suslin-Baum*. Eine Menge paarweise unvergleichbarer Elemente in einem Baum heißt *Antikette*.

Man beachte, dass jeder Suslin-Baum ein ω_1-Baum ist, da jeder Level eine Antikette ist.

Bevor wir Suslin-Bäume eingehender studieren, bemerken wir zunächst, dass jeder Baum der Höhe ω eine unendliche Kette oder Antikette hat.

Satz 21.3 (Lemma von König)**.** *Sei T ein ω-Baum. Dann hat T eine unendliche Kette.*

Beweis. Wir definieren eine Kette $s_0 < s_1 < \dots$ in T. Für jedes $t \in T$ sei

$$T_t = \{s \in T : s < t \vee s = t \vee s > t\}.$$

Da T unendlich ist, existiert $s_0 \in \mathrm{Lev}_T(0)$, so dass T_{s_0} unendlich ist.

Angenommen, wir haben für ein $n \in \omega$ einen Knoten $s_n \in T$ bereits so gewählt, dass T_{s_n} unendlich ist. Da jedes Level von T endlich ist, hat jeder Knoten nur endlich viele direkte Nachfolger. Daher gibt es einen direkten Nachfolger s_{n+1} von s_n, für den $T_{s_{n+1}}$ unendlich ist.

Die Menge $\{s_n : n \in \omega\}$ ist eine unendliche Kette in T. □

Die naheliegende Verallgemeinerung dieses Satzes auf ω_1-Bäume ist falsch, wie das Beispiel der Aronszajn-Bäume zeigt.

Wir werden $\diamondsuit$ benutzen, um einen Suslin-Baum zu konstruieren. Zunächst stellen wir Folgendes fest:

Lemma 21.4. *Ist T ein ω_1-Baum, in dem für jeden Knoten $s \in T$ zwei unvergleichbare Knoten $t_0, t_1 > s$ existieren und in dem jede Antikette abzählbar ist, so ist T bereits Suslin.*

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass T keine überabzählbare Kette hat. Angenommen $(s_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ ist eine streng monoton wachsende Folge in T. Wähle eine Folge $(t_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ wie folgt:

Angenommen, t_α wurde bereits gewählt für alle $\alpha < \beta$ für ein $\beta < \omega_1$. Sei $\gamma < \omega_1$, so dass die Höhe von s_γ mindestens das Supremum der Höhen der t_α, $\alpha < \beta$ ist. Wähle $t_\beta > s_\gamma$, so dass t_β nicht in unterhalb eines Knotens der Form s_α liegt. Das geht, da s_γ zwei unvergleichbare Nachfolger hat, von denen höchstens einer unterhalb eines s_α liegen kann.

Die so konstruierte Menge $\{t_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ ist eine überabzählbare Antikette in T, ein Widerspruch. □

Satz 21.5. $\diamondsuit$ *impliziert die Existenz eines Suslin-Baumes.*

Beweis. Sei $(S_\alpha)_{\alpha\in\omega_1}$ eine $\diamondsuit$-Folge. Wir konstruieren eine Halbordnung $\preccurlyeq$ auf ω_1, so dass $T = (\omega_1, \preccurlyeq)$ ein Suslin-Baum ist. Für jedes $\alpha < \omega_1$ ist der α-te Level von T genau die Menge $\{\omega \cdot \alpha + n : n \in \omega\}$, wobei $\cdot$ und $+$ die Operationen der Ordinalzahlarithmetik bezeichnen. Wir werden sicherstellen, dass jeder Knoten $t \in T$ Nachfolger in beliebiger Höhe hat.

Angenommen, die Relation $\preccurlyeq$ wurde auf $\omega \cdot (\alpha + 1) = \omega \cdot \alpha + \omega$ bereits definiert, so dass das Intervall $[\omega \cdot \alpha, \omega \cdot (\alpha + 1))$ das α-te und oberste Level des Baumes $(\omega \cdot (\alpha + 1), \preccurlyeq)$ ist. Wir erweitern $\preccurlyeq$ auf die Menge $\omega \cdot (\alpha + 2)$, indem wir für jedes $n \in \omega$ die Ordinalzahlen $\omega \cdot (\alpha+1)+2n$ und $\omega \cdot (\alpha+1)+2n+1$ als direkte Nachfolger von $\omega \cdot \alpha + n$ bezüglich der Baumordnung $\preccurlyeq$ deklarieren.

Die Limesschritte der Konstruktion sehen wie folgt aus:

Sei $\alpha < \omega_1$ eine Limesordinalzahl. Angenommen, $\preccurlyeq$ ist bereits auf der Menge $\omega \cdot \alpha$ definiert. Wir definieren die Fortsetzung von $\preccurlyeq$ auf $\omega \cdot (\alpha + 1)$, und zwar so, dass das Intervall $[\omega \cdot \alpha, \omega \cdot (\alpha + 1))$ das oberste Level des Baumes $(\omega \cdot (\alpha + 1), \preccurlyeq)$ wird und jeder Knoten in $\omega \cdot \alpha$ einen Nachfolger in $[\omega \cdot \alpha, \omega \cdot (\alpha + 1))$ hat.

Dazu sei $(a_n)_{n\in\omega}$ eine Aufzählung von $\omega \cdot \alpha$ und $(\gamma_m)_{m\in\omega}$ eine Folge von Ordinalzahlen, die in α kofinal ist. Für jedes $n \in \omega$ wähle nun rekursiv eine bezüglich $\preccurlyeq$ wachsende Folge $(b^n_m)_{m\in\omega}$ von Knoten des Baumes $(\alpha, \preccurlyeq)$ mit $a_n \preccurlyeq b^n_0$, so dass die Höhe von b^n_m mindestens γ_m ist. Das geht, wenn jeder Knoten von $(\alpha, \preccurlyeq)$ Nachfolger in beliebiger Höhe hat. Für jedes $n \in \omega$ sei nun

$$B_n = \{s \in \alpha : \exists m \in \omega(s \preccurlyeq b^n_m)\}.$$

Wir setzen nun $\preccurlyeq$ so auf die Menge $\omega \cdot (\alpha + 1)$ fort, dass für jedes $n \in \omega$ die Ordinalzahl $\omega \cdot \alpha + n$ die bezüglich $\preccurlyeq$ kleinste obere Schranke der Menge B_n ist.

Um sicherzustellen, dass der konstruierte Baum in der Tat Suslin wird, müssen wir gewisse Limesschritte der Konstruktion noch etwas sorgfältiger ausführen. Ist nämlich $\alpha = \omega \cdot \alpha$ und S_α eine maximale Antikette des Baumes $(\alpha, \preccurlyeq)$, so wählen wir in der obigen Konstruktion für jedes $n \in \omega$ den Knoten b^n_0 zusätzlich so, dass es ein $b \in S_\alpha$ gibt, so dass $b \preccurlyeq b^n_0$ gilt. Das geht, da S_α eine maximale Antikette in $(\alpha, \preccurlyeq)$ ist und damit a_n mit einem Element b von S_α vergleichbar ist.

Damit erreichen wir, dass jedes B_n einen nichtleeren Durchschnitt mit S_α hat. Es folgt, dass jedes Element des α-ten Levels von $(\omega \cdot (\alpha + 1), \preccurlyeq)$ oberhalb eines Elements von S_α liegt. Wenn wir nun weitere Elemente oberhalb des α-ten Levels zu dem Baum hinzufügen, wird jeder neue Knoten mit einem Element von S_α vergleichbar sein. Es folgt, dass die maximale Antikette S_α von $(\omega \cdot \alpha, \preccurlyeq)$ auch in dem vergrößerten Baum maximal ist.

Das beendet die Konstruktion von $\preccurlyeq$ auf ω_1. Wir zeigen nun, dass der Baum $T = (\omega_1, \preccurlyeq)$ tatsächlich Suslin ist. Aus der Konstruktion geht unmittelbar hervor, dass jeder Knoten von T zwei unvergleichbare Nachfolger hat und dass T ein ω_1-Baum ist. Nach Lemma 21.4 bleibt also nur zu zeigen, dass T keine überabzählbaren Antiketten hat.

Man kann sich schnell klarmachen, dass die Menge

$$\{\alpha < \omega_1 : \omega \cdot \alpha = \alpha\}$$

club in ω_1 ist. Ist $A \subseteq \omega_1$ eine maximale Antikette in T, so enthält die Menge

$$\{\alpha < \omega_1 : A \cap (\omega \cdot \alpha) \text{ ist eine maximale Antikette in } (\omega \cdot \alpha, \preccurlyeq)\}$$

eine club Teilmenge von ω_1.

Betrachte nämlich eine Funktion $f : \omega_1 \to \omega_1$ die jedem $\alpha < \omega_1$ ein $\beta < \omega_1$ zuordnet, so dass jedes Element von α bezüglich $\preccurlyeq$ mit einem Element von $A \cap \beta$ vergleichbar ist. So eine Funktion f existiert, da jeder Knoten von T mit einem Element von A vergleichbar ist, jedes $\alpha < \omega_1$ abzählbar ist und ω_1 regulär ist. Die Ordinalzahlen $\alpha < \omega_1$, die unter f abgeschlossen sind, bilden eine club Teilmenge von ω_1. Ist $\alpha < \omega_1$ eine Limesordinalzahl, die unter f abgeschlossen ist, so ist $A \cap \alpha$ eine maximale Antikette in $(\alpha, \preccurlyeq)$.

Es folgt, dass es eine club Teilmenge C von ω_1 gibt, so dass für jedes $\alpha \in C$ gilt: $\omega \cdot \alpha = \alpha$ und $A \cap \alpha$ ist eine maximale Antikette in $(\alpha, \preccurlyeq)$. Da $(S_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ eine $\diamondsuit$-Folge ist, ist die Menge $S = \{\alpha < \omega_1 : A = \alpha \cap S_\alpha\}$ stationär. Es folgt, dass es eine Ordinalzahl $\alpha \in S \cap C$ gibt.

Im α-ten Schritt der Konstruktion von $\preccurlyeq$ war also $\alpha = \omega \cdot \alpha$ und $S_\alpha = A \cap \alpha$ eine maximale Antikette in $(\alpha, \preccurlyeq)$. Die weitere Konstruktion stellte sicher, dass S_α eine maximale Antikette in ganz T blieb. Es folgt $S_\alpha = A$. Insbesondere ist A abzählbar, was zu zeigen war. □

Wir fixieren nun einen Suslin-Baum $T = (\omega_1, \preccurlyeq)$ und konstruieren mit Hilfe von T eine Suslin-Gerade. Dazu sei L die Menge der maximalen Ketten von T. Wir definieren eine lineare Ordnung $<$ auf L wie folgt:

Seien $A, B \in L$ verschieden. Da A und B beide maximal sind, gilt $A \not\subseteq B$ und $B \not\subseteq A$. Da T ein Baum ist und A und B maximale Ketten in T, ist $A \cap B$ ein Anfangsstück von A und B. Seien α das $\preccurlyeq$-minimale Element von $A \setminus B$ und β das $\preccurlyeq$-minimale Element von $B \setminus A$. Wir setzen $A < B$ falls die Ordinalzahl α kleiner ist als die Ordinalzahl β.

Es ist klar, dass $<$ irreflexiv ist. Die Transitivität rechnet man leicht nach. Damit ist $(L, <)$ eine lineare Ordnung.

Lemma 21.6. $(L, <)$ *erfüllt die abzählbare Kettenbedingung.*

Beweis. Sei $\mathcal{A}$ eine Familie paarweise disjunkter, nichtleerer, offener Intervalle in L. Für jedes $I \in A$ wähle $A_I, B_I \in L$ mit $A_I < B_I$ und $I = (A_I, B_I)$. Die Menge $A_I \cap B_I$ ist ein gemeinsames Anfangsstück von A_I und B_I. Sei $A \in (A_I, B_I)$. Dann ist $A_I \cap B_I \subseteq A$. Wegen der Maximalität von A und wegen $A_I < A < B_I$ enthält A ein Element $\alpha_I \notin A_I \cap B_I$. Für jede maximale Kette B von T mit $\alpha_I \in B$ gilt $B \in (A_I, B_I)$.

Seien nun $I, J \in \mathcal{A}$ verschieden. Da jede maximale Kette A mit $\alpha_I \in A$ in I liegt und jede maximale Kette B mit $\alpha_J \in B$ in J, gibt es keine maximale Kette, die sowohl α_I und α_J enthält. Es folgt, dass α_I und α_J bezüglich der Baumordnung $\preccurlyeq$ unvergleichbar sind. Damit ist $\{\alpha_I : I \in \mathcal{A}\}$ eine Antikette in T. Da T Suslin ist, ist diese Antikette abzählbar. Da die α_I paarweise verschieden sind, ist auch $\mathcal{A}$ abzählbar. □

Lemma 21.7. $(L, <)$ *hat keine abzählbare, dichte Teilmenge.*

Beweis. Sei $D \subseteq L$ abzählbar. Da T Suslin ist, ist jede maximale Kette von T abzählbar. Es folgt, dass $\bigcup D$ abzählbar ist. Daher gibt es ein $\alpha < \omega_1$, so dass $\bigcup D$ kein Element einer Höhe $\geq \alpha$ enthält.

Wir zeigen, dass es in T einen Knoten der Höhe α gibt, der in überabzählbar vielen maximalen Ketten von T liegt. Angenommen, das ist nicht der Fall. Dann liegt jeder der abzählbar vielen Knoten von T mit Höhe α in nur abzählbar vielen maximalen Ketten. Jeder Knoten einer Höhe $\geq \alpha$ liegt aber in mindestens einer maximalen Kette, und solch eine Kette enthält genau einen Knoten der Höhe α. Es folgt, dass die Menge der Knoten einer Höhe $\geq \alpha$ die Vereinigung von abzählbar vielen maximalen Ketten ist. Da T Suslin ist, ist jede solche Kette abzählbar. Da T nur abzählbar viele Knoten einer Höhe $< \alpha$ hat, folgt, dass T selbst abzählbar ist. Ein Widerspruch.

Sei nun a ein Knoten der Höhe α, der in mindestens drei verschiedenen maximalen Ketten A, B und C liegt. Wir können $A < B < C$ annehmen. Betrachte nun das Intervall (A, C). Dieses Intervall enthält mindestens B und ist damit nicht leer. Jede maximale Kette in (A, C) enthält a und damit einen Knoten der Höhe α. Also ist (A, C) disjunkt zu D. Es folgt, dass D nicht dicht in L ist. □

Lemma 21.8. *Wenn es eine lineare Ordnung $(L, <)$ gibt, die nicht separabel ist, aber die abzählbare Kettenbedingung erfüllt, dann gibt es auch eine Suslin-Gerade.*

Beweis. Sei L' die lineare Ordnung, die man erhält, indem man rechts und links an L je eine Kopie von $\mathbb{Q}$ anhängt. Die Ordnungsrelation auf L' bezeichnen wir weiterhin mit $<$. Ein Paar $(x, y) \in (L')^2$ is ein Sprung, falls $x < y$ gilt und das offene Intervall (x, y) leer ist. Sei L'' die lineare Ordnung, die man erhält, indem man in jeden Sprung von L' eine Kopie von $\mathbb{Q}$ einfügt.

Man rechnet leicht nach, dass L'' eine dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte ist, die die abzählbare Kettenbedingung erfüllt und nicht separabel ist. Die Vervollständigung von L'' ist eine Suslin-Gerade. □

Korollar 21.9. *$\diamondsuit$ impliziert die Existenz einer Suslin-Geraden und damit die Negation von SH.*

Man kann zeigen, dass es genau dann eine Suslin-Gerade gibt, wenn es einen Suslin-Baum gibt. *Martins Axiom* (*MA*), impliziert, dass es keine Suslin-Bäume gibt. ZFC+MA ist genau dann widerspruchsfrei, wenn ZFC widerspruchsfrei ist. Damit lässt sich die Suslin-Hypothese in ZFC weder beweisen noch widerlegen.

22. Partitionsresultate

In diesem Abschnitt werden ein paar Resultate aus der unendlichen Ramsey-Theorie vorgestellt, sogenannte Partitionsresultate.

Definition 22.1. Sei X eine Menge. Eine *Färbung* der n-elementigen Teilmengen von X mit m Farben ist eine Abbildung $c : [X]^n \to m$. Anstelle von $c(\{x_1, \dots, x_n\})$ schreiben wir $c(x_1, \dots, x_n)$. $H \subseteq X$ ist *c-homogen* (oder einfach *homogen*) mit Farbe $i \in m$, falls c auf $[H]^n$ konstant den Wert i hat.

Seien κ und λ Kardinalzahlen. Die *Partitionsrelation*

$$\kappa \to (\lambda)^n_m$$

gelte genau dann, wenn jede Färbung der n-elementigen Teilmengen einer κ-mächtige Menge mit m Farben eine homogene Menge der Mächtigkeit λ hat.

Der Ausdruck *Partitionsresultat* kommt daher, dass man eine Färbung $c : [X]^n \to m$ auch als Partition $\{c^{-1}(0), \dots, c^{-1}(m-1)\}$ von $[X]^n$ auffassen kann.

Der unendliche Satz von Ramsey ist die Aussage

$$\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_m$$

für alle $m, n \in \omega$. Der endliche Satz von Ramsey besagt, dass für alle $l \in \omega$ und alle $m, n \in \omega$ ein $k \in \omega$ existiert, so dass

$$k \to (l)^n_m$$

gilt.

Lemma 22.2. *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Wenn es auf κ einen freien, κ-vollständigen Ultrafilter F gibt, so gilt*

$$\kappa \to (\kappa)^n_m$$

für alle $m, n \in \omega$.

Beweis. Wir zeigen nur $\kappa \to (\kappa)^2_2$. Den allgemeinen Fall zeigt man zunächst durch Induktion über n für $m = 2$. Der Induktionsschritt ist dabei ähnlich dem Beweis von $\kappa \to (\kappa)^2_2$. Für festes $n \in \omega$ kann man $\kappa \to (\kappa)^n_m$ dann leicht durch Induktion über $m > 0$ zeigen.

Zunächst stellen wir fest, dass $\kappa = \aleph_0$ ist oder messbar. In beiden Fällen ist κ regulär.

Sei nun c eine Färbung der zweielementigen Teilmengen von κ mit 2 Farben. Für jedes $\alpha \in \kappa$ und alle $i \in 2$ sei

$$X^i_\alpha := \{\beta \in \kappa : \beta > \alpha \wedge c(\alpha, \beta) = i\}.$$

Da F κ-vollständig ist, enthält F keine Mengen der Mächtigkeit $< \kappa$. Insbesondere enthält F für jedes $\alpha \in \kappa$ die Menge $X^0_\alpha \cup X^1_\alpha$. Damit enthält F für jedes $\alpha \in \kappa$ eine der Mengen X^0_α und X^1_α. Für $\alpha \in \kappa$ sei $i_\alpha \in 2$ so gewählt, dass $X^{i_\alpha}_\alpha \in F$ ist.

Eine der beiden Mengen $\{\alpha \in \kappa : i_\alpha = 0\}$ und $\{\alpha \in \kappa : i_\alpha = 1\}$ ist Element von F. Sei $i \in 2$ so, dass $Y^i := \{\alpha \in \kappa : i_\alpha = i\} \in F$ ist.

Wir wählen nun eine Folge $(\alpha_\gamma)_{\gamma\in\kappa}$ in κ, so dass $\{\alpha_\gamma : \gamma \in \kappa\}$ c-homogen mit Farbe i ist. Wähle α_0 beliebig in Y^i. Sei α_γ bereits gewählt für alle $\gamma < \delta$. Wähle

$$\alpha_\delta \in (\kappa \setminus \sup_{\gamma<\delta}(\alpha_\gamma + 1)) \cap Y^i \cap \bigcap_{\gamma<\delta} X^i_{\alpha_\gamma}.$$

Das geht, da die Menge auf der rechten Seite der $\in$-Relation wegen der κ-Vollständigkeit von F nicht leer ist. Dabei geht auch die Regularität von κ ein, die garantiert, dass $\sup_{\gamma<\delta}(\alpha_\gamma + 1) < \kappa$ ist.

Die Folge $(\alpha_\gamma)_{\gamma\in\kappa}$ leistet das Gewünschte. Seien nämlich $\alpha, \beta \in H := \{\alpha_\gamma : \gamma \in \kappa\}$ mit $\alpha < \beta$. Nach Konstruktion gilt $\beta \in X^i_\alpha$. Damit ist $c(\alpha, \beta) = i$. H ist also c-homogen mit Farbe i. □

Da jeder freie Ultrafilter $\aleph_0$-vollständig ist, gilt

Korollar 22.3. *$\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_m$ für alle $n, m \in \omega$.*

Bis auf $\aleph_0$ muss es keine unendliche Kardinalzahl κ geben, für die $\kappa \to (\kappa)^2_2$ gilt. In gewisser Weise das beste Partitionsresultat in ZFC ist der folgende Satz von Erdös und Rado, den wir aber erst später beweisen.

Satz 22.4 (Erdös, Rado)**.** *Für jede unendliche Kardinalzahl κ und gilt*

$$(2^\kappa)^+ \to (\kappa^+)^2_\kappa.$$

Dieser Satz hat auch Verallgemeinerungen für Färbungen n-elementiger Mengen, die wir hier jedoch nicht betrachten.

Das folgende Lemma zeigt warum der Satz von Erdös und Rado bestmöglich ist.

Lemma 22.5. *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Dann gilt $2^\kappa \not\to (\kappa^+)^2_2$.*

Beweis. Wir zeigen nur $2^{\aleph_0} \not\to (\aleph_1)^2_2$. Der Beweis des allgemeinen Falls ist ähnlich, aber man muss zunächst Versionen der linearen Ordnung $\mathbb{R}$ in größeren Mächtigkeiten konstruieren.

Wir müssen eine Färbung c der zweielementigen Teilmengen von $2^{\aleph_0}$ mit zwei Farben angeben, für die es keine überabzählbare homogene Menge gibt. Da nur die Mächtigkeit der unterliegenden Menge interessant ist, genügt es, eine entsprechende Färbung auf $\mathbb{R}$ anzugeben.

Wähle eine Wohlordnung auf $\mathbb{R}$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ sei $c(x, y) = 0$, falls die übliche lineare Ordnung auf $\mathbb{R}$ auf x und y mit der gewählten Wohlordnung übereinstimmt. Es sei $c(x, y)$, wenn die gewählte Wohlordnung auf x und y der üblichen Ordnung entgegen gesetzt ist.

Angenommen, $H \subseteq \mathbb{R}$ ist überabzählbar. Ist H homogen mit Farbe 0, so stimmt die übliche Ordnung von $\mathbb{R}$ auf H mit einer Wohlordnung überein. $\mathbb{R}$ hat aber keine wohlgeordneten Teilmengen von überabzählbarem Ordnungstyp.

Ist H homogen mit Farbe 1, so ist die übliche Ordnung von $\mathbb{R}$ auf H genau entgegengesetzt zu einer Wohlordnung. Durch Spiegeln erhält man den gleichen Widerspruch wie oben. □

Übung 22.1. *Sei $(L, <)$ eine linear geordnete Menge der Mächtigkeit κ. Es gelte $\kappa \to (\kappa)^2_2$. Zeige, dass es eine streng monotone Abbildung $f : \kappa \to L$ gibt.*

23. Ultraprodukte und der endliche Satz von Ramsey

Satz 23.1. *Seien $n, m \in \omega$. Für jedes $l \in \omega$ existiert ein $k \in \omega$ mit $k \to (l)^n_m$.*

Beweis. Angenommen für ein $l \in \omega$ existiert kein $k \in \omega$ mit $k \to (l)^m_n$. Dann gibt es für jedes $a \in \omega$ eine Färbung $c_a : [a+1]^n \to m$, so dass n keine c_a-homogene Teilmenge der Mächtigkeit l gibt.

Sei F ein freier Ultrafilter auf ω. Sei $P := \prod_{a\in\omega}(a+1)$. Für $f, g \in P$ sei

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \quad \{a \in \omega : f(a) = g(a)\} \in F.$$

Wie man leicht nachrechnet, ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf P. Für jedes $f \in P$ sei $\overline{f}$ die $\sim$-Äquivalenzklasse von f. $P/\sim$ sei die Menge der $\sim$-Äquivalenzklassen von Elementen von P.

Für $i \in m$ und $\overline{f}, \overline{g} \in P/\sim$ mit $\overline{f} \neq \overline{g}$ sei $c(\overline{f}, \overline{g}) = i$, falls

$$\{a \in \omega : f(a) \neq g(a) \wedge c_a(f(a), g(a)) = i\} \in F$$

ist. Es nicht schwer, die Wohldefiniertheit von c nachzuweisen. Damit ist c eine Färbung der n-elementigen Teilmengen von $P/\sim$ mit m Farben. $(P/\sim, c)$ ist das *Ultraprodukt* der Färbungen $(a+1, c_a)$, $a \in \omega$.

Wir zeigen:

(1) $P/\sim$ ist unendlich.
(2) Es gibt keine c-homogene Menge der Mächtigkeit l.

Offenbar ist das ein Widerspruch zu Korollar 22.3.

Für (1) sei $b \in \omega$. Seien $f_1, \dots, f_b \in P$ mit $|\{f_1(a), \dots, f_m(a)\}| = b$ für alle $a \geq b$. Für alle $a \in \omega \setminus b$ sind also $f_1(a), \dots, f_b(a)$ paarweise verschieden. Da F frei ist, gilt $\omega \setminus b \in F$. Es folgt, dass $\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_b$ paarweise verschieden sind. Damit hat $P/\sim$ mindestens b Elemente.

Für (2) nehmen wir an, es gäbe eine c-homogene Menge $H = \{\overline{f}_s : s < l\}$ mit Mächtigkeit l und Farbe $i \in m$. Für alle $\{s_1, \dots, s_n\} \in [l]^n$ sei

$$A_{s_1,\dots,s_n} := \{a \in \omega : |\{f_{s_1}(a), \dots, f_{s_n}(a)\}| = n \wedge c_a(f_{s_1}(a), \dots, f_{s_n}(a)) = i\}.$$

Man beachte, dass $A_{s_1,\dots,s_n} \in F$ ist. Sei

$$A := \bigcap \{A_{s_1,\dots,s_n} : \{s_1 \dots, s_n\} \in [l]^n\}.$$

Wegen der Endlichkeit von $[l]^n$ ist $A \in F$. Insbesondere ist $A \neq \emptyset$. Wähle $a \in A$. Dann ist $\{f_s(a) : s < l\}$ eine c_a-homogene Menge der Mächtigkeit l. Ein Widerspruch zur Wahl von c_a. □

Übung 23.1. *Sei F ein freier Ultrafilter auf ω. Wir definieren eine* Ultrapotenz *$\prod_{n\in\omega} \mathbb{R}/\sim$ von $\mathbb{R}$ wie folgt: Für $f, g \in \prod_{n\in\omega} \mathbb{R} = {}^\omega\mathbb{R}$ sei*

$$f \sim g \quad :\Leftrightarrow \{n \in \omega : f(n) = g(n)\} \in F.$$

Wie oben ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf ${}^\omega\mathbb{R}$ (das ist nicht zu zeigen). Wieder wird mit $\overline{f}$ die $\sim$-Äquivalenzklasse von f bezeichnet. Für $f, g \in {}^\omega\mathbb{R}$ sei

$$\overline{f} \prec \overline{g} \quad :\Leftrightarrow \quad \{n \in \omega : f(n) < g(n)\} \in F.$$

a) Zeige: $({}^\omega\mathbb{R}/\sim, \prec)$ ist eine lineare Ordnung.

b) Für jedes $r \in \mathbb{R}$ sei $f_r : \omega \to \mathbb{R}$ die Funktion, die konstant den Wert r hat. Zeige, dass die Abbildung

$$e : \mathbb{R} \to {}^\omega\mathbb{R}/\sim; r \mapsto \overline{f}_r$$

streng monoton ist. Zeige weiter, dass $e[\mathbb{R}]$ in ${}^\omega\mathbb{R}/\sim$ nicht kofinal ist.

Auf der Struktur ${}^\omega\mathbb{R}/\sim$ lassen sich auf natürliche Weise Addition und Multiplikation definieren. Damit wird ${}^\omega\mathbb{R}/\sim$ zu einem angeordneten Körper, in den sich $\mathbb{R}$ via e einbetten lässt. Strukturen dieser Art werden in der Nichtstandard-Analysis betrachtet. Ultrapotenzen des Universums V spielen eine große Rolle bei der Untersuchung großer Kardinalzahlen und insbesondere messbarer Kardinalzahlen.

24. Die Baumeigenschaft

Satz 24.1. *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl. Es gelte $\kappa \to (\kappa)^2_2$. Jeder Baum der Höhe κ, dessen sämtliche Levels Mächtigkeit $< \kappa$ haben, hat einen Zweig der Länge κ.*

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir

Lemma 24.2. *Sei κ eine unendliche Kardinalzahl mit $\kappa \to (\kappa)^2_2$. Dann ist κ regulär.*

Beweis. Sei λ eine Kardinalzahl $\leq \kappa$ und $\kappa = \bigcup_{\gamma\in\lambda} X_\gamma$, wobei die X_γ paarweise disjunkt sind. Für $\alpha, \beta \in \kappa$ mit $\alpha \neq \beta$ sei $c(\alpha,\beta) := 0$, falls α und β in demselben X_γ liegen. Ansonsten sei $c(\alpha,\beta) := 1$.

Sei nun $H \subseteq \kappa$ c-homogen mit $|H| = \kappa$. Ist H homogen mit Farbe 0, so liegen ist $H \subseteq X_\gamma$ für ein $\gamma \in \lambda$. Insbesondere ist $|X_\gamma| = \kappa$. Ist H homogen mit Farbe 1, so schneidet H jedes X_γ in höchstens einem Element. Es folgt $\lambda = \kappa$.

Das zeigt, dass nicht alle X_γ weniger als κ Elemente haben können, wenn $\lambda < \kappa$ ist. Damit ist κ regulär. □

Beweis von Satz 24.1. Sei $(T, <_T)$ ein Baum der Höhe κ, dessen Levels Mächtigkeit $< \kappa$ haben. Es gilt $|T| = \kappa$. Daher können wir annehmen, dass $T = \kappa$ gilt. Für alle $\alpha \in \kappa$ und alle $\xi \in T$, die auf Level α oder höher liegen, sei $\pi_\alpha(\xi)$ das eindeutig bestimmte Element in $\mathrm{Lev}_\alpha(T)$ mit $\pi_\alpha(\xi) \leq \xi$.

Wir setzen $<_T$ zu einer linearen Ordnung $\prec$ fort: Seien ξ, ζ in T mit $\xi \neq \zeta$. Falls $\xi <_T \zeta$ gilt, so setze $\xi \prec \zeta$. Setze $\zeta \prec \xi$, falls $\zeta <_T \xi$. Sind ξ und ζ unvergleichbar, so sei $\alpha \in \kappa$ minimal mit $\pi_\alpha(\xi) \neq \pi_\alpha(\zeta)$. Setze $\xi \prec \zeta$, falls die Ordinalzahl $\pi_\alpha(\xi)$ kleiner ist als die Ordinalzahl $\pi_\alpha(\zeta)$. Sonst setze $\zeta \prec \xi$.

Es ist klar, dass $\prec$ eine lineare Ordnung ist. Definiere $c : [\kappa]^2 \to 2$ durch $c(\xi,\zeta) = 0$, falls $(\xi < \zeta \Leftrightarrow \xi \prec \zeta)$, und $c(\xi,\zeta) = 1$, sonst. Wegen $\kappa \to (\kappa)^2_2$ existiert eine c-homogene Menge $H \subseteq \kappa$ mit Mächtigkeit κ.

Da jeder Level Mächtigkeit $< \kappa$ hat, gibt es für jedes $\alpha \in \kappa$ ein $\rho_\alpha \in \kappa$, so dass jedes $\xi \in \kappa$ mit $\rho_\alpha < \xi$ oberhalb von Level α liegt. Falls $\gamma, \delta \in \kappa$ beide auf Level α oder höher liegen, so gilt

$$\gamma \prec \delta \quad \Rightarrow \quad \pi_\alpha(\gamma) \prec \pi_\alpha(\delta) \vee \pi_\alpha(\gamma) = \pi_\alpha(\delta).$$

Falls H homogen mit Farbe 0 ist, so ist für festes α die Folge $(\pi_\alpha(\xi))_{\xi\in H\setminus\rho_\alpha}$ monoton wachsend (aber nicht unbedingt streng monoton wachsend). Ist H homogen mit Farbe 1, so ist diese Folge monoton fallend. In jedem Falle existiert $\sigma_\alpha \in \kappa$ und $b_\alpha \in \mathrm{Lev}_\alpha(T)$, so dass für alle $\xi \in \kappa$ mit $\sigma_\alpha < \xi$ gilt: $\pi_\alpha(\xi) = b_\alpha$. Da je zwei b_α unterhalb desselben Elements von T liegen, ist $\{b_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ ein Zweig in T mit Mächtigkeit κ. □

25. Reflexion und elementare Submodelle

In diesem Abschnitt greifen wir auf die ,,Einführung in die Logik und Modelltheorie" oder eine andere Einführung in die mathematische Logik zurück. Sei M eine Menge. Auf M ist $\in$, oder genauer, $\in\restriction M$, eine zweistellige Relation. Für eine Formel $\varphi(x_1,\dots,x_n)$, wobei alle freien Variablen von φ unter den $x_1,\dots,x_n$ seien, und $a_1,\dots,a_n\in M$ wissen wir daher, wann $\varphi(a_1,\dots,a_n)$ in $(M,\in)$, oder kürzer, in M, zutrifft. Gilt $\varphi(a_1,\dots,a_n)$ in M, so schreiben wir kurz $M\models\varphi(a_1,\dots,a_n)$.

Ist M eine echte Klasse, so haben wir auch eine genaue Vorstellung davon, wann $\varphi(a_1,\dots,a_n)$ in M gilt. An dieser Stelle muß man jedoch vorsichtig sein. Wie am Anfang des Skripts bemerkt wurde, lässt sich die gesamte Mathematik in der Sprache der Mengenlehre formulieren. Wenn wir also über Gruppen, Ringe, Körper usw. sprechen und dabei Aussagen und Formeln z.B. in der Sprache der Gruppentheorie betrachten, so sind diese Aussagen und Formeln selbst Mengen, nämlich endliche Folgen von Zeichen, wobei die Zeichen irgendwelche geeignet geählten Mengen sind.

Die Relation $\models$ zwischen Strukturen (Mengen zusammen mit Funktionen, Relationen und Konstanten) und Aussagen bzw. Formeln mit Belegungen der freien Variablen ist eine zweistellige Relation auf V, die wie üblich definiert ist.

Die ,,Struktur" $(V,\in)$ entzieht sich aber diesen Betrachtungen, da V und $\in$ keine Mengen sind. Auch die Aussagen über V, die wir betrachten, sind keine Objekte in V, sondern z.B. Aussagen, die wir auf ein Blatt Papier schreiben.

Das Problem, welches hier vorliegt, ist, dass wir die Konzepte ,,Formel", ,,Struktur" und ,,Gültigkeit", die wir benutzen, um über V zu reden, auch in V selbst formalisieren (definieren) können. Wir betrachten die ,,Struktur" V ja gerade, weil man sämtliche Mathematik in V betreiben kann. Man kann also in V das Konzept ,,Modell von ZFC" formalisieren, aber man kann nicht in V über die Struktur V sprechen, weil V kein Element von V ist.

Alles, was sich in V formalisieren lässt ist *Mathematik*, das Reden über V bzw. über das, was sich in V formalisieren lässt, ist *Metamathematik*. Jede metamathematische Formel in der Sprache der Mengenlehre, also eine Formel, die über V spricht, lässt sich auf natürliche Weise übersetzen in eine Formel in V. Im Allgemeinen lässt sich nicht jede Menge in V, von der V glaubt, dass sie eine Formel in der Sprache der Mengenlehre ist, in eine metamathematische Formel übersetzen.

Definition 25.1. Sei M eine Klasse. Für Formeln φ in der Sprache der Mengenlehre definieren wir die *Relativierung* φ^M von φ auf M durch Induktionüber den Formelaufbau wie folgt:

(1) Ist φ atomar, so sei $\varphi^M:=\varphi$.
(2) $(\neg\varphi)^M:=\neg\varphi^M$
(3) $(\varphi\wedge\psi)^M:=\varphi^M\wedge\psi^M$
(4) $(\exists x\varphi)^M:=\exists x\in M\varphi^M$

Man erhält also die Relativierung von φ auf M, indem man alle Quantoren in φ auf M einschränkt. Intuitiv ist für eine Formel $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ und $a_1,\dots,a_n\in M$ genau dann $\varphi^M(a_1,\dots,a_n)$ in V wahr, wenn $\varphi(a_1,\dots,a_n)$ in M gilt.

Definition 25.2. Seien M und N Klassen mit $M\subseteq N$. Eine Formel $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ ist *absolut* für M und N, falls für alle $a_1,\dots,a_n\in M$ gilt:

$$\varphi^M(a_1,\dots,a_n)\quad\Leftrightarrow\quad\varphi^N(a_1,\dots,a_n)$$

Die Formel φ heißt absolut über M, wenn sie absolut für M und V ist.

Satz 25.3 (Reflexionssatz)**.** *Seien $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ Formeln in der Sprache der Mengenlehre. Zu jeder Ordinalzahl α existiert eine Ordinalzahl $\beta\geq\alpha$, so dass $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ über V_β absolut sind. Dabei kann β als Kardinalzahl gewählt werden.*

Beweis. Wir können annehmen, dass die Liste $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ gegenüber Teilformeln abgeschlossen ist. Atomare Formeln sind offenbar absolut über jeder Klasse. Auch sind Boolesche Kombinationen absoluter Formeln wieder absolut.

Ist $\varphi(x, y_1, \dots, y_m)$ absolut über V_γ, so ist $\exists x \varphi(x, y_1, \dots, y_m)$ absolut über V_γ, falls für alle $b_1, \dots, b_m \in V_\gamma$ ein $a \in V_\gamma$ existiert, so dass gilt:

$$\varphi(a, b_1, \dots, b_m) \quad \Leftrightarrow \exists x \varphi(x, b_1, \dots, b_m)$$

Setze $\gamma_0 := \alpha$. Wir wählen nun eine Folge $(\gamma_{k+1})_{k \in \omega}$ von Kardinalzahlen, so dass für alle $k \in \omega$ gilt

(1) $\gamma_k < \gamma_{k+1}$ und
(2) für alle $\varphi(x, y_1, \dots, y_m) \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ und alle $b_1, \dots, b_m \in V_{\gamma_k}$ existiert $a \in V_{\gamma_{k+1}}$ mit

$$\varphi(a, b_1, \dots, b_m) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \varphi(x, b_1, \dots, b_n).$$

Setze schließlich $\beta := \sup_{k \in \omega} \gamma_k$. Als Supremum einer Menge von Kardinalzahlen ist β selbst eine Kardinalzahl.

Wir beweisen die Absolutheit der Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ über V_β durch Induktion über den Formelaufbau. Da die Liste $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ unter Teilformeln abgeschlossen ist, ist jede zusammengesetzte Formel unter den φ_i aus Formeln der Liste zusammengesetzt. Bei der Induktion über den Formelaufbau können wir daher annehmen, dass alle betrachteten Formeln und Teilformeln unter den φ_i sind. Der einzig interessante Fall sind die Existenzformeln.

Sei $\exists x \varphi(x, y_1, \dots, y_m) \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Angenommen, $\varphi(x, y_1, \dots, y_m)$ ist eine Formel unter den φ_i, die über V_β absolut ist. Seien $b_1, \dots, b_m \in V_\beta$. Dann existiert $k \in \omega$ mit $b_1, \dots, b_m \in V_{\gamma_k}$. Nach Wahl von γ_{k+1} existiert $a \in V_{\gamma_k} \subseteq V_\beta$ mit

$$\varphi(a, b_1, \dots, b_m) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \varphi(x, b_1, \dots, b_m).$$

Damit ist $\exists x \varphi$ absolut über V_β. □

Wenn wir im Folgenden von einer Struktur M sprechen, wobei M eine Menge ist, so meinen wir immer die Struktur $(M, \in)$.

Definition 25.4. Seien M und N Mengen mit $M \subseteq N$. M ist *elementares Submodell* (oder auch *elementare Unterstruktur*) von N, falls für alle Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ in der Sprache der Mengenlehre und alle $a_1, \dots, a_n \in M$ gilt:

$$M \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad N \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$$

Ist M elementares Submodell von N, so schreiben wir $M \preccurlyeq N$.

Satz 25.5 (Satz von Löwenheim und Skolem)**.** *Sei N eine unendliche Menge und X Teilmenge von N. Dann existiert ein elementares Submodell M von N mit $X \subseteq M$ und $|M| = |X| + \aleph_0$:*

Eine Kombination von Reflexionssatz mit dem Satz von Löwenheim und Skolem erlaubt es beinahe, beliebig kleine (unendliche) elementare Submodelle von V zu betrachten.

Zunächst stellen wir Folgendes fest: Ist $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine (metamathematische) Formel in der Sprache der Mengenlehre, so hat φ eine (naheliegende) Übersetzung $\tilde{\varphi}$ in eine Menge, von der V glaubt, dass sie Formel in der Sprache der Mengenlehre ist. Für jede Menge M und alle $a_1 \dots, a_n$ gilt

$$M \models \tilde{\varphi}(a_1, \dots, a_n) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^M(a_1, \dots, a_n).$$

Sei nun κ irgendeine unendliche Kardinalzahl. Angenommen, wir wollen einen Beweis mit Hilfe eines elementaren Submodells M von V mit $|M| = \kappa$ führen. Der Beweis wird wegen seiner endlichen Länge nur für endlich viele Formeln φ benutzen, dass φ über M absolut ist.

Nach dem Reflexionssatz existiert eine Kardinalzahl $\chi > \kappa$, so dass diese endlich vielen Formeln über V_χ absolut sind. Eine solche Kardinalzahl χ nennen wir im jeweiligen Zusammenhang *genügend groß*. Wählt man nun M als ein elementares Submodell von V_κ mit $|M| = \kappa$, so kann man den geplanten Beweis mit M anstelle eines wirklichen elementaren Submodells von V durchziehen.

Beweis des Satzes von Erdös und Rado. Sei $\lambda := (2^\kappa)^+$ und $c : [\lambda]^2 \to \kappa$ eine Färbung.

Wähle eine genügend große Kardinalzahl χ. Wähle eine Folge $(M_\alpha)_{\alpha\in\kappa^+}$ von elementaren Untermodellen von V_χ mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für alle $\alpha, \beta \in \kappa^+$ mit $\alpha < \beta$ ist $M_\alpha \subseteq M_\beta$ und $M_\alpha \in M_\beta$.
(2) Für alle $\alpha \in \kappa^+$ ist $|M_\alpha| = 2^\kappa$.
(3) Für alle $\alpha \in \kappa^+$, alle $C \subseteq M_\alpha \cap \lambda$ mit $|C| \leq \kappa$ und alle $f : C \to \kappa$ ist $f \in M_{\alpha+1}$.

Für Limesordinalzahlen α sei dabei $M_\alpha := \bigcup_{\beta\in\alpha} M_\beta$. Im Nachfolgerschritt lassen sich (2) und (3) erfüllen, da es für jedes $\alpha \in \kappa^+$ nur 2^κ Funktionen f gibt, die betrachtet werden müssen. Nach dem Satz von Löwenheim-Skolem existiert ein elementares Untermodell $M_{\alpha+1}$ von V_κ, das M_α erweitert und alle relevanten f enthält.

Wähle nun $\delta \in \lambda \setminus M$. Wir definieren eine Folge $(\xi_i)_i \in \kappa^+$ von Elementen von $\lambda \cap M$ wie folgt: Für jedes $j \in \kappa^+$ betrachte die Funktion

$$f : \{\xi_i : i < j\} \to \kappa : \xi_i \mapsto c(\xi_i, \delta).$$

Wegen $|\{\xi_i : i < j\}| \leq \kappa$ existiert ein $\alpha \in \kappa^+$ mit $\{\xi_i : i < j\} \subseteq M_\alpha$. Nach Wahl von $M_{\alpha+1}$ ist $f \in M_{\alpha+1}$. Da $M_{\alpha+1}$ elementares Untermodell von V_χ ist, existiert eine Ordinalzahl $\xi_j \in \lambda \cap (M_{\alpha+1} \setminus M_\alpha)$, so dass für jedes $i < j$ gilt: $c(\xi_i, \xi_j) = c(\xi_i, \delta)$.

In der Folge $(\xi_i)_{i\in\kappa^+}$ hängt damit die Farbe $c(\xi_i, \xi_j)$ von zwei verschiedenen Elementen nur von dem Folgenglied mit dem kleineren Index ab. Wähle eine Menge $H \subseteq \{\xi_i : i \in \kappa^+\}$ mit Mächtigkeit κ^+, so dass für ein $k \in \kappa$ und alle $\xi \in H$ gilt: $c(\xi, \delta) = k$. Nach Wahl der Folge $(\xi_i)_{i\in\kappa^+}$ ist H dann homogen mit Farbe k. □