Mathematisches Institut
der Universität Bonn
S. Geschke, B. Irrgang

SoSe 2010
02. 06. 2010
Blatt 6

Übungen zur Mathematischen Logik

21. Leiten Sie folgende Aussagen im Kalkül ab:

(a) $\exists x\ \varphi \rightarrow \neg\forall x\ \neg\varphi$

(b) $\neg\forall x\ \neg\varphi \rightarrow \exists x\ \varphi$.

22. Zeigen Sie:

$\emptyset \vdash \forall x\ \forall y\ (\exists u\ (x \equiv u\ \wedge\ y \equiv u)\ \rightarrow\ \forall z(x \equiv z \leftrightarrow y \equiv z))$.

23. Sei $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot, <)$ die Struktur der natürlichen Zahlen mit Konstanten 0, 1, den Funktionen $+$, $\cdot$ und der Relation $<$. Sei $\tau = \{0, 1, +, \cdot, <\}$ das entsprechende Vokabular und $T = \{\varphi \text{ Aussage} \mid \mathfrak{N} \models \varphi\}$. Sei desweiteren I eine überabzählbare Menge und c_i ein neues Konstantensymbol für jedes $i \in I$. Zeigen Sie, dass $T \cup \{\neg c_i = c_j \mid i \neq j \in I\}$ widerspruchsfrei ist.

24. Seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei abzählbare, dichte lineare Ordnungen ohne Endpunkte. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ isomorph zueinander sind.

Hinweis: Zählen Sie die Elemente von $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ auf, und konstruieren Sie rekursiv einen Isomorphismus.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 09. 06. 2010 vor der Vorlesung