Mathematisches Institut
der Universität Bonn
S. Geschke, B. Irrgang

SoSe 2010
12. 05. 2010
Blatt 5

Übungen zur Mathematischen Logik

17. Sei $\tau = \{+, \cdot, 0, 1, \leq, F\}$ das um ein einstelliges Funktionssymbol F erweiterte Vokabular der angeordneten Körper. Man formalisiere: "f ist im Intervall $(0,1)$ differenzierbar". D.h. man gebe eine Aussage φ an, so dass $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, \leq, f) \models \varphi$ genau dann gilt, wenn $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in $(0,1)$ differenzierbar ist.

18. Sei τ ein Vokabular. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ τ-Strukturen mit Trägermengen A und B. Dann heißt $\mathfrak{A}$ elementare Substruktur von $\mathfrak{B}$, falls $A \subseteq B$ und für alle $a_1, \dots, a_n \in A$ und alle Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ genau dann $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ gilt, wenn $\mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ ist.

Zeigen Sie: Die Struktur $(\mathbb{N}, +)$ der natürlichen Zahlen mit ihrer Addition hat nur sich selbst als elementare Substruktur.

19. (a) Sei τ ein Vokabular und seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Strukturen mit Trägermengen A, B. Definieren Sie (ohne nachzuschlagen), wann eine Abbildung $\pi : A \to B$ Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißt.

(b) Zeigen Sie: Gibt es einen Isomorphismus zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so gilt für alle Formeln $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ genau dann $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$, wenn $\mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)]$.

20. Sei $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0)$ der Körper der reellen Zahlen. Zeigen Sie, dass es eine Formel $\varphi(x_1, x_2)$ gibt, so dass $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0) \models \varphi[a, b]$ genau dann gilt, wenn $a < b$ ist. Zeigen Sie außerdem, dass es für $(\mathbb{R}, +, 0)$ keine Formel mit dieser Eigenschaft gibt.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 31. 05. 2010 vor der Vorlesung