Mathematisches Institut
der Universität Bonn
S. Geschke, B. Irrgang

SoSe 2010
28. 04. 2010
Blatt 3

Übungen zur Mathematischen Logik

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt bipartit, wenn $V = S \cup T$ die disjunkte Vereinigung zweier Mengen S und T ist, und jede Kante $\{x, y\} \in E$ eine Ecke x in S und eine Ecke y in T hat. Eine injektive Abbildung $f : S \to T$ heißt Matching auf S (in G), wenn $\{x, f(x)\} \in E$ für alle $x \in S$ gilt. Für $A \subseteq S$ setze $N(A) = \{y \in T \mid \exists x \in A(\{x, y\} \in E)\}$.

9. Es gilt der Heiratssatz: Ist G wie oben ein endlicher bipartiter Graph, dann existiert genau dann ein Matching auf S, wenn $|A| \leq |N(A)|$ für alle endlichen $A \subseteq S$ gilt. Folgern Sie daraus denselben Satz für abzählbar unendliche bipartite Graphen, bei denen jeder Knoten nur endlich viele Nachbarn hat.

10. Sei $T \subseteq \{0, 1\}^*$ unendlich, so dass für alle $s \in \{0, 1\}^*$ und alle $t \in T$ mit $s \sqsubset t$ auch $s \in T$ gilt. Zeigen Sie ohne Verwendung des Kompaktheitssatzes, dass es eine unendliche Teilmenge S von T gibt, so dass S durch $\sqsubset$ total geordnet wird.

11. Zeigen Sie Aufgabe 10 mit Hilfe des Kompaktheitssatzes. Betrachten Sie dazu $s \in T$ als eine Belegung v_s und zeigen Sie, dass es Formeln ψ_n gibt, so dass für Wörter der Länge n genau dann $v_s(\psi_n) = 1$ gilt, wenn $s \in T$ ist.

12. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Ramsey: Jede unendliche Folge reeller Zahlen hat entweder eine streng monoton absteigende, eine streng monoton aufsteigende oder eine konstante Teilfolge.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 05. 05. 2010 vor der Vorlesung