

Übungen zur Mathematischen Logik

41. Sei τ ein Vokabular und T eine Theorie über τ . Eine Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ heißt vollständig in T , wenn für jede Formel $\psi(x_1, \dots, x_n)$ entweder $T \models \varphi \rightarrow \psi$ oder $T \models \varphi \rightarrow \neg\psi$ gilt. Eine Struktur $\mathfrak{A} = (A, \dots)$ heißt atomar, wenn für alle $a_1, \dots, a_n \in A$ eine in $Th(\mathfrak{A})$ vollständige Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ existiert mit $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

Zeigen Sie: Sind \mathfrak{A} und \mathfrak{B} abzählbare, atomare Strukturen mit $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, so gilt $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

42. Sei P_n das Programm mit der Gödelnummer n und

$$D_n := \{m \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ mit Eingabe } m \text{ hält}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\{n \in \mathbb{N} \mid D_n = \mathbb{N}\}$ nicht entscheidbar ist.

43. Definiere rekursiv eine Funktion $F : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ durch $F(x, 0) = 1$ und

$$F(x, n + 1) = x^{F(x, n)}.$$

Geben Sie eine Formel φ der Arithmetik an, so dass $(\mathbb{N}, 0, ', +, \cdot, <) \models \varphi[x, n, y]$ genau dann gilt, wenn $F(x, n) = y$.

44. Sei $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ eine Δ_0 -Formel der Arithmetik. Zeigen Sie, dass

$$R = \{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n \mid (\mathbb{N}, 0, ', +, \cdot, <) \models \varphi[m_1, \dots, m_n]\}$$

entscheidbar ist.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 14. 07. 2010 vor der Vorlesung

Was haltet Ihr davon, an einem mathematischen Seminar teilzunehmen, in dem Ihr:

- selber über die Inhalte mitbestimmt: Was ist interessante Mathematik, was ist kanonisch, was ist richtig abgefahren?
- Anderen mal Eure Lieblingsthemen präsentieren könnt (nicht müsst),
- ruhig mal „dumme Fragen“ stellen könnt, wenn Ihr etwas nicht versteht,
- Einblicke in spannende mathematische Vertiefungsgebiete bekommt, die Ihr noch nicht kennengelernt habt?

Ihr fragt Euch, ob es diese Veranstaltung gibt, wie sie heißt, für wen sie gedacht ist?

„Basic Notions“ geht im Wintersemester 2010/2011 in die dritte Runde; diesmal hoffentlich mit Euch!

Vorbesprechung: Dienstag, den 20. Juli 2010, um 16:15 Uhr im Seminarraum 0.008