

## Übungen zur Mathematischen Logik

41. Sei  $\tau$  ein Vokabular und  $T$  eine Theorie über  $\tau$ . Eine Formel  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  heißt vollständig in  $T$ , wenn für jede Formel  $\psi(x_1, \dots, x_n)$  entweder  $T \models \varphi \rightarrow \psi$  oder  $T \models \varphi \rightarrow \neg\psi$  gilt. Eine Struktur  $\mathfrak{A} = (A, \dots)$  heißt atomar, wenn für alle  $a_1, \dots, a_n \in A$  eine in  $Th(\mathfrak{A})$  vollständige Formel  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  existiert mit  $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ .

Zeigen Sie: Sind  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  abzählbare, atomare Strukturen mit  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ , so gilt  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$ .

42. Sei  $P_n$  das Programm mit der Gödelnummer  $n$  und

$$D_n := \{m \in \mathbb{N} \mid P_n \text{ mit Eingabe } m \text{ hält}\}.$$

Zeigen Sie, dass  $\{n \in \mathbb{N} \mid D_n = \mathbb{N}\}$  nicht entscheidbar ist.

43. Definiere rekursiv eine Funktion  $F : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  durch  $F(x, 0) = 1$  und

$$F(x, n + 1) = x^{F(x, n)}.$$

Geben Sie eine Formel  $\varphi$  der Arithmetik an, so dass  $(\mathbb{N}, 0, ', +, \cdot, < ) \models \varphi[x, n, y]$  genau dann gilt, wenn  $F(x, n) = y$ .

44. Sei  $\varphi(x_1, \dots, x_n)$  eine  $\Delta_0$ -Formel der Arithmetik. Zeigen Sie, dass

$$R = \{(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n \mid (\mathbb{N}, 0, ', +, \cdot, < ) \models \varphi[m_1, \dots, m_n]\}$$

entscheidbar ist.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 14. 07. 2010 vor der Vorlesung

Was haltet Ihr davon, an einem mathematischen Seminar teilzunehmen, in dem Ihr:

- selber über die Inhalte mitbestimmt: Was ist interessante Mathematik, was ist kanonisch, was ist richtig abgefahren?
- Anderen mal Eure Lieblingsthemen präsentieren könnt (nicht müsst),
- ruhig mal „dumme Fragen“ stellen könnt, wenn Ihr etwas nicht versteht,
- Einblicke in spannende mathematische Vertiefungsgebiete bekommt, die Ihr noch nicht kennengelernt habt?

Ihr fragt Euch, ob es diese Veranstaltung gibt, wie sie heißt, für wen sie gedacht ist?

**„Basic Notions“ geht im Wintersemester 2010/2011 in die dritte Runde; diesmal hoffentlich mit Euch!**

**Vorbesprechung: Dienstag, den 20. Juli 2010, um 16:15 Uhr im Seminarraum 0.008**