Mathematisches Institut
der Universität Bonn
S. Geschke, B. Irrgang

SoSe 2010
30. 06. 2010
Blatt 10

Übungen zur Mathematischen Logik

Sei $\tau = \{0,', +, \cdot, <\}$ das Vokabular der Arithmetik. Sei t ein Term in dem die Variable x nicht vorkommt. Schreibe $(\forall x < t)\ \varphi$ für $\forall x\ (x < t\ \rightarrow \varphi)$ und $(\exists x < t)\ \varphi$ für $\exists x(x < t\ \wedge \varphi)$. Wir sagen $(\forall x < t)\ \varphi$ und $(\exists x < t)\ \varphi$ entstehen aus φ durch beschränkte Quantifikation. Die Δ_0-Formeln sind die Formeln, die aus den atomaren Formeln durch $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ und beschränkte Quantifikation entstehen. Eine Formel der Gestalt $\exists x_1 \ldots \exists x_n\ \varphi$ heißt Σ_1-Formel, falls φ eine Δ_0-Formel ist. Die Aussage von Aufgabe 35 bleibt gültig, wenn man Σ_1^0 durch Σ_1 ersetzt.

37. Sei $\beta(t, p, i) = a$ wie in Lemma 5.5 der Vorlesung durch eine geeignete Formel ausgedrückt. Zeigen Sie, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{N}$

$PA \vdash \exists t \exists p\ (\beta(t, p, 0) = 1\ \wedge$

$$(\forall i < t_y)(\beta(t, p, i + 1) = t_x \cdot \beta(t, p, i))\ \wedge\ \neg\beta(t, p, t_y) = t_z)$$

genau dann gilt, wenn

$PA \vdash \neg\exists t \exists p\ (\beta(t, p, 0) = 1\ \wedge$

$$(\forall i < t_y)(\beta(t, p, i + 1) = t_x \cdot \beta(t, p, i))\ \wedge\ \beta(t, p, t_y) = t_z).$$

38. Zeigen Sie damit ohne Verwendung von Lemma 5.14 der Vorlesung, dass die Exponentialfunktion

$$F : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x^y$$

in PA repräsentierbar ist.

39. Sei T eine widerspruchsfreie, entscheidbare Theorie. Zeigen Sie, dass jede in T repräsentierbare Relation entscheidbar und jede in T repräsentierbare Funktion berechenbar ist.

40. Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass man jede partielle Ordnung zu einer linearen Ordnung fortsetzen kann.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 07. 07. 2010 vor der Vorlesung