Elementare Substrukturen

Veronika Goeck

14. Juli 2009

1 Definitionen

Definition 1.1 (Kardinalität eines Alphabets)**.** *Sei $S = (R, F, C)$ Symbolmenge eines Alphabets, wobei R die Menge der Relationssymbole, F die Menge der Funktionssymbole, C die Menge der Konstanten ist. Dann ist $|S| := |R \cup F \cup C|$ die Kardinalität des Alphabets.*

Definition 1.2 (S-Struktur)**.** *Eine S-Struktur ist ein Paar $\mathfrak{A} = (A, a)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *A ist eine nichtleere Menge (Trägermenge)*
2. *a ist eine auf S definierte Abbildung (Interpretationsfunktion), so dass gilt:*
   (a) *Ist r aus S ein n-stelliges Relationssymbol, dann ist $a(r) = r^{\mathfrak{A}}$ eine n-stellige Relation über A.*
   (b) *Ist f aus S ein n-stelliges Funktionssymbol, dann ist $a(f) = f^{\mathfrak{A}}$ eine n-stellige Funktion über A.*
   (c) *Ist c aus S ein Konstantensymbol, dann ist $a(c) = c^{\mathfrak{A}}$ ein Element aus A.*

Definition 1.3 (elementare Äquivalenz)**.** *Seien $\mathfrak{A} = (A, a)$ und $\mathfrak{B} = (B, b)$ S-Strukturen. $\mathfrak{A}$ ist elementar äquivalent zu $\mathfrak{B}$ falls für jeden S-Satz φ gilt:*

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$$

Sind zwei Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ äquivalent, so schreiben wir $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$

Definition 1.4 (Elementare Einbettung)**.** *Seien $\mathfrak{A} = (A, a)$ und $\mathfrak{B} = (B, b)$ S-Strukturen. Eine Abbildung $\pi : A \longrightarrow B$ heißt elementare Einbettung, falls für jede Formel (S-Ausdruck) $\varphi(x_1 \dots x_n)$ und beliebige $a_1 \dots a_n \in A$ gilt:*

$$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \dots a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi[\pi(a_1) \dots \pi(a_n)]$$

Definition 1.5 (Substruktur)**.** *Seien $\mathfrak{A} = (A, a)$ und $\mathfrak{B} = (B, b)$ S-Strukturen. $\mathfrak{A}$ heißt Substruktur von $\mathfrak{B}$, falls gilt:*

1. *$A \subseteq B$*
2. *Ist $r \in S$ ein n-stelliges Relationssymbol, so gilt $r^{\mathfrak{A}} = r^{\mathfrak{B}} \cap A^n$.*
3. *Ist $f \in S$ ein n-stelliges Funktionssymbol, so gilt $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \upharpoonright A^n$. Insbesondere ist A unter $f^{\mathfrak{B}}$ abgeschlossen.*

4. *Ist $c \in S$ ein Konstantensymbol, so gilt $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$.*

Ist $\mathfrak{A}$ Substruktur von $\mathfrak{B}$, so schreiben wir $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$.

Definition 1.6 (Elementare Substruktur)**.** *Seien $\mathfrak{A} = (A, a)$ und $\mathfrak{B} = (B, b)$ S-Strukturen mit $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$. $\mathfrak{A}$ ist elementare Substruktur von $\mathfrak{B}$, wenn für jede Formel $\varphi(x_1 \dots x_n)$ und für alle $a_1 \dots a_n \in A$ gilt:*

$$\mathfrak{B} \models \varphi[a_1 \dots a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[a_1 \dots a_n]$$

. Ist $\mathfrak{A}$ elementare Substruktur von $\mathfrak{B}$ so schreiben wir $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

Bemerkung. *Ist $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$, so ist $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ genau dann wenn $id : A \longrightarrow B$ elementare Einbettung ist.*
$\mathfrak{A} < \mathfrak{B} \Rightarrow \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$

Beispiel 1. $(\mathbb{Q}, \leq^{\mathbb{Q}}) \prec (\mathbb{R}, \leq^{\mathbb{R}})$*, also insbesondere* $(\mathbb{Q}, \leq^{\mathbb{Q}}) \equiv (\mathbb{R}, \leq^{\mathbb{R}})$

Beispiel 2. *Sei $G = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $(G, \leq^{\mathbb{N}}) \equiv (\mathbb{N}, \leq^{\mathbb{N}})$ und $(G, \leq^{\mathbb{N}}) < (\mathbb{N}, \leq^{\mathbb{N}})$, aber $(G, \leq^{\mathbb{N}}) \not\prec (\mathbb{N}, \leq^{\mathbb{N}})$. Die Identität ist eine Einbettung, jedoch keine elementare Einbettung.*

Beispiel 3. *Sei T_F die Theorie der Körper. $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind Modelle dieser Theorie. $\mathbb{Q} < \mathbb{R}$ aber $\mathbb{Q} \not\prec \mathbb{R}$.*

2 Konstruktion elementarer Substrukturen

Lemma 1 (Tarski)**.** *Seien $\mathfrak{A} = (A, a)$ und $\mathfrak{B} = (B, b)$ S-Strukturen mit $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$. Dann gilt:*
$\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \Leftrightarrow$ für jede Formel $\psi(x, x_1 \dots x_n)$ und alle $a_1 \dots a_n \in A$ mit $\mathfrak{B} \models \exists x \psi[a_1 \dots a_n]$ ein $a \in A$ existiert mit $\mathfrak{A} \models \psi[a, a_1 \dots a_n]$.

Beweis. $\underline{\Rightarrow}$ Diese Implikation ist klar, da gilt: Sei $\psi(x, x_1 \dots x_n)$ Formel, $a_1 \dots a_n \in A$, so dass $\mathfrak{B} \models \exists x \psi[a_1 \dots a_n]$. Da $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, folgt $\mathfrak{A} \models \exists x \psi[a_1 \dots a_n]$, also existiert ein $a \in A$ mit$\mathfrak{A} \models \psi[a, a_1 \dots a_n]$.

$\underline{\Leftarrow}$ Wir zeigen über den Aufbau der Formeln, dass für alle Formeln φ über S $\mathfrak{B} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$ gilt.

1. Ist φ atomar, so gilt $\mathfrak{B} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$, da $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$.
2. Sei $\psi = \neg\varphi$, die Behauptung gelte bereits für φ. Dann gilt: $\mathfrak{B} \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \neg\varphi \Leftrightarrow$ nicht $\mathfrak{B} \models \varphi \Leftrightarrow$ nicht $\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \neg\varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi$.
3. Die Behauptung gelte für φ und ψ. Dann gilt: $\mathfrak{B} \models (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi$ und $\mathfrak{B} \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$ und $\mathfrak{A} \models \psi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (\varphi \wedge \psi)$.
4. Angenommen die Bahauptung sei bereits für $\varphi[x, x_1 \dots x_n]$ gezeigt. Dann gilt:

   $\underline{\Rightarrow}$ $\mathfrak{B} \models \exists x\varphi \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi[a, a_1 \dots a_n] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \exists x\varphi[a_1 \dots a_n]$.
   $\underline{\Leftarrow}$ $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[a_1 \dots a_n] \Rightarrow$ es existiert ein
   $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \varphi[a, a_1 \dots a_n] \Rightarrow$ es existiert ein $a \in B$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi[a, a_1 \dots a_n] \Rightarrow \mathfrak{B} \models \exists x\varphi[a_1 \dots a_n]$.

□

Lemma 2. *Sei S = (C, F, R) Symbolmenge eines Alphabets. Sei* $\mathfrak{B} = (B, b)$ *S-Struktur,* $M \subseteq B$*,* $\kappa \in Card$ *mit* $\kappa \geq \max\{\aleph_0, |S|, |M|\}$*, sowie* $\kappa \leq |B|$*. Dann existiert eine Substruktur* $\mathfrak{A} = (A, a)$ *von* $\mathfrak{B}$*, mit* $|A| = \kappa$*, und* $M \subseteq A$*.*

Beweis. Damit $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ gilt, muss $A \subseteq B$ gelten. Sei also zunächst $A \subseteq B$ beliebig. Damit $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ ist, muss gelten:

1. $r \in R \Rightarrow r^{\mathfrak{A}} = r^{\mathfrak{B}} \cap A^n$
2. $f \in F \Rightarrow f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}} \upharpoonright A^n$
3. $c \in C \Rightarrow c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{B}}$

Zweiteres ist genau dann möglich, wenn für alle $f \in S$ $f^{\mathfrak{B}}$ unter A abgeschlossen ist.
Wir werden im Folgenden konstruktiv zeigen, dass es eine solche Menge A gibt, für die außerdem gilt, dass $M \subseteq A$ und $|A| = \kappa$.
Wähle hierfür zunächst ein $M' \in B$ mit $M \subseteq M'$ und $|M'| = \kappa$ beliebig. Definiere nun induktiv:

$$A_0 := M' \cup \{c^{\mathfrak{B}} | c \in S \text{ ist ein Konstantensymbol}\}$$

$$A_{n+1} := A_n \cup \{f^{\mathfrak{B}}(b_1 \dots b_k) | f \in S \text{ ist k-stelliges Funktionssymbol, } a_1 \dots a_k \in A_n\}$$

Definiere nun $A := \cup_{n \in \omega} A_n$.

Beh. A erfüllt die oben genannten Eigenschaften.

Bew.

1. (a) Zeige mit Induktion über n, dass $|A_n| = \kappa$:
   $|A_0| = |M' \cup \{c^{\mathfrak{B}} | c \in S \text{ ist ein Konstantensymbol }\}| \leq |M'| + |\{c^{\mathfrak{B}} | c \in S$ ist ein Konstantensymbol $\}| = \kappa + |C| = \kappa$ (da $|C| \leq |S| \leq \kappa$ und $\kappa \geq \aleph_0$ laut Voraussetzung). Aus $|M'| = \kappa$ folgt $|A_0| = \kappa$.

   $|A_{n+1}| = |A_n \cap \{f^{\mathfrak{B}}(b_1 \dots b_k) | f \in S$ ist k-stelliges Funktionssymbol, $b_1 \dots b_k \in A_n\}| \leq |A_n| + |\{f^{\mathfrak{B}}(b_1 \dots b_k) | f \in S$ ist k-stelliges Funktionssymbol, $b_1 \dots b_k \in A_n\}| \leq \kappa + |F| = \kappa$ (da $|B_n = \kappa \geq \aleph_0$ nach Induktionsvoraussetzung/Voraussetzung und $|F| \leq |S| \leq \kappa$ nach Voraussetzung).

   (b) Daraus folgt nun, dass $\kappa \leq |A| \leq |\omega| \cdot |B_n| = \aleph_0 \cdot \kappa = \kappa$ und somit $|A| = \kappa$.
2. Nach Konstruktion ist $f^{\mathfrak{B}}(b_1 \dots b_n) \in A$ für alle k-stelligen Funktionssymbole $f \in S$ und alle $b_1 \dots b_n \in A$.
3. $A_0 \subseteq A \Rightarrow M \subseteq \mathfrak{A}$ und A enthlt alle Konstanten von $\mathfrak{B}$.

Somit erfüllt A die gewünschten Eigenschaften und ist Trägermenne einer S-Struktur
$\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.

□

Satz (Satz von Löwenheim-Skolem, abwärts)**.** *Sei S=(C, F, R) Symbolmeng eines Alphabets,* $\mathfrak{B} = (B, b)$ *eine S-Struktur,* $M \subseteq B$*,* $\kappa \in Card$ *mit* $\kappa \geq \max\{\aleph_0, |S|, |M|\}$ *und* $|\kappa \leq |B|$*. Dann existiert eine Substruktur* $\mathfrak{A} = (A, a)$ *von* $\mathfrak{B}$ *mit* $M \subseteq A$ *und* $|B| = \kappa$*.*

Beweis. Nach Lemma 1 genügt es zu zeigen:
Es existiert eine S-Struktur $\mathfrak{A} = (A, a)$, $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, $M \subseteq A$ und $|A| = \kappa$, so dass für alle Formeln $\varphi(x, y_1 \dots y_n)$ und alle $a_1 \dots a_n \in A$ mit $\mathfrak{B} \models \exists x \varphi[a_1 \dots a_n]$ ein $b' \in B$ existiert,

so dass $\mathfrak{A} \models \varphi[b', a_1 \dots a_n]$.
Hierfür erweitern wir zunächst die Symbolmenge S unseres Alphabets, indem wir für jede Formel $\varphi(x, y_1 \dots y_n)$ ein n-stelliges Funktionssymbol f_φ zu S hinzufügen. Die so entstandene Symbolmenge bezeichnen wir mit S'.
Nun müssen wir neben der Symbolmenge S auch die S-Struktur $\mathfrak{B} = (B, b)$ zu einer S'-Struktur erweitern. Hierfür werden die neu eingeführten Funktionssymbole f_φ wie folgt auf B interpretiert:
Für $a_1 \dots a_n \in \mathfrak{B}$ sei $f_\varphi^{\mathfrak{B}}$ ein $b' \in B$ mit $\mathfrak{B} \models \varphi[b', a_1 \dots a_n]$, falls ein solches b' existiert. Existiert kein solches b', so sei $f_\varphi^{\mathfrak{B}}$ ein beliebiges $b' \in B$.
Die so eingeführten Funktionen $f_\varphi^{\mathfrak{B}}$ heissen Skolemfunktionen für die Struktur $\mathfrak{B}$.
Sei $\mathfrak{B}'$ also die S'-Struktur, die aus $\mathfrak{B}$ durch Erweiterung um die Skolemfunktionen entsteht.
Für eine beliebige Symbolmenge S gibt es höchstens $\max(\aleph_0, |S|)$ Formeln über S. Daraus folgt sofort, dass S' höchstens die Mächtigkeit $\max(\aleph_0, |S|)$ hat.
Nach Lemma 2 hat $\mathfrak{B}'$ eine Substruktur $\mathfrak{A}' = (A, a)$ mit $M \subseteq A$ und $|A| = \kappa$. Definiere nun $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}' \upharpoonright S$.

Beh. $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$

Bew. Aus $\mathfrak{A}' \leq \mathfrak{B}'$ folgt, dass auch $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$.
Sei nun $\varphi(x, y_1 \dots y_n)$ Formel über S. Seinen $\ddot{a}_1 \dots a_n \in A$ mit $\mathfrak{B} \models \exists x\varphi[a_1 \dots a_n]$.
Zu zeigen bleibt nun noch, dass $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[a_1 \dots a_n]$:
Da A Trägermenge einer Substruktur von $\mathfrak{B}'$ ist, ist B abgeschlossen unter den Funktionen $f_\varphi^{\mathfrak{B}}$. Also ist $b' := f_\varphi^{\mathfrak{B}}(a_1 \dots a_n) \in A$. Nach der Wahl $f_\varphi^{\mathfrak{B}}$ gilt, dass $\mathfrak{A} \models \varphi[b', a_1 \dots a_n]$ und $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[a_1 \dots a_n]$

Also gilt $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. □

Es gibt auch noch einen weiteren Satz über elementare Substrukturen von Löweinheim-Skolem, der hier der Vollständigkeit halber aufgeführt, jedoch nicht bewiesen wird.

Satz (Satz von Löwenheim-Skolem, aufwärts)**.** *Sei $\mathfrak{A} = (A, a)$ eine unendliche S-Struktur, κ Kardinalzahl, $\kappa \geq max(\aleph_0, |A|, |S|)$. Dann gibt es eine S-Struktur $\mathfrak{B} = (B, b)$ mit $|B| = \kappa$., so dass $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.*

3 Elementare Ketten und elementare Substrukturen

Definition 3.1. *Sei S Symbolmenge eines Alphabets und $(I, \leq)$ eine lineare Ordnung. Für jedes i $\in$ I sei $\mathfrak{A}_i = (A_i, a_i)$ eine S-Struktur. Eine solche Familie $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ von S-Strukturen heisst elementare Kette, falls für alle i, j $\in$ I mit i $\leq$ j, $\mathfrak{A}_i \leq \mathfrak{A}_j$ gilt.*
Wir definieren nun eine S-Strunktur $\mathfrak{A} = (A, a)$ wie folgt:

1. *$A := \cup_{i\in I} A_i$ sei die Trägermenge.*
2. *Für jedes n-stellige Relationssymbol $r \in S$ sei $r^{\mathfrak{A}} := \cup_{i\in I} r^{\mathfrak{A}_i}$.*
3. *Für jedes n-stellige Funktionssymbol $f \in S$ und alle $a_1 \dots a_n \in A$ wähle ein $i \in I$ mit $a_1 \dots a_n \in A_i$ und setze $f^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n) := f^{\mathfrak{A}_i}(a_1 \dots a_n)$.*
4. *Für jedes Konstantensymbol $r \in S$ sei $c^{\mathfrak{A}} := c^{\mathfrak{A}_i}$ für ein beliebiges $i \in I$.*

Für $\mathfrak{A}$ schreibt man auch $\cup_{i\in I}\mathfrak{A}_i$.

Satz. *Sei $(\mathfrak{A}_i)_{i\in I}$ eine elementare Kette. Dann ist $\mathfrak{A} := \cup_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ eine S-Struktur und für jedes $i \in I$ gilt $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}$.*

Beweis. 1. Es ist klar, dass $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur ist.

2. **Beh.** Für alle $j \in I$ gilt: $\mathfrak{A}_j \prec \mathfrak{A}$.

   Bew. Sein $j \in J$. Es ist klar, dass $\mathfrak{A}_j \subseteq \cup_{i\in I} A_i$.
   Sei $r \in S$ ein n-stelliges Relationssymbol, $a_1 \dots a_n \in A_j$. Aus der Definition von $\mathfrak{A}$ folgt, dass $r^{\mathfrak{A}_j}(a_1 \dots a_n) = r^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n) \cap A_j^n = r^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n)$.
   Sei $f \in S$ ein n-stelliges Funktionssymbol, $a_1 \dots a_n \in A_j$.In der Definition von $\mathfrak{A}$ wurde ein $i \in I$ gewählt, so dass $a_1 \dots a_n \in A_i$ und $f^{\mathfrak{A}} = a^{\mathfrak{A}_i}$ gesetzt.
   Ist $i \leq j$, so gilt $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}_j$ und somit $f^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n)$=$f^{\mathfrak{A}_i}(a_1 \dots a_n)$=$f^{\mathfrak{A}_j}(a_1 \dots a_n)$.
   Ist $i > j$, so gilt $\mathfrak{A}_j \prec \mathfrak{A}_i$ und somit $f^{\mathfrak{A}_j}(a_1 \dots a_n)$=$f^{\mathfrak{A}_i}(a_1 \dots a_n)$=$f^{\mathfrak{A}}(a_1 \dots a_n)$.
   Sei $c \in S$ ein Konstantensymbol. In der Definition von $\mathfrak{A}$ wurde ein $i \in I$ beliebig gewählt und $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}_i}$ gesetzt. Ist $i \leq j$, so gilt $\mathfrak{A}_i \prec \mathfrak{A}_j$ und somit $c^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}_i} = c^{\mathfrak{A}_j}$. Ist $i > j$, so gilt $\mathfrak{A}_j \prec \mathfrak{A}_i$ und somit $c^{\mathfrak{A}_j} = c^{\mathfrak{A}_i} = c^{\mathfrak{A}}$.
   Also gilt $\mathfrak{A}_j \leq \mathfrak{A}$.

3. Nun zeigen wir, dass auch $\mathfrak{A}_j \prec \mathfrak{A}$ gilt:
   Sei hierfür $j \in I$ und $\varphi(x, y_1 \dots y_n)$ Formel über S. Seien $b_1 \dots b_n \in \mathfrak{A}_j$ mit $\mathfrak{A} \models \exists x\varphi[b_1 \dots b_n]$.Dann existiert ein $i \in I$, so dass es ein $a \in A_i$ gibt, so dass $\mathfrak{A} \models \varphi[a, b_1 \dots b_n]$. Hierbei kann o.B.d.A $i \geq j$ gewählt werden. Es gilt dann $\mathfrak{A}_i \models \exists x\varphi[b_1 \dots b_n]$. Da $i \geq j$, gilt auch $\mathfrak{A}_j \prec \mathfrak{A}_i$ und somit $\mathfrak{A}_j \models \exists x\varphi[b_1 \dots b_n]$. Somit sind die Voraussetzungen für Lemma 1 erfüllt und es gilt tats"achlich $\mathfrak{A}_j \prec \mathfrak{A}$.

□

4 Anwendungen elementarer Substrukturen

Im Folgenden sei S die Sprache, die ein 2-stelliges Relationssymbol $\in$ enthält.

Definition 4.1. *Sei $\Theta \in Card$. Dann sei $H_\Theta = \{x||TC(x) < \Theta\}$.*

Bemerkung. *Im folgenden sei H_Θ die S-Struktur . Ist Θ regulär und überabzählbar, so gilt $(H_\Theta, \in) \models ZFC^-$.*

Bemerkung. *Ist $x \subset H_\Theta$ mit $|x| < \Theta$, dann ist $x \in H_\Theta$.*

Lemma 3. *Seien Θ und μ überabzählbar, reguläre Kardinalzahlen, κ unendliche Kardinalzahl mit $\kappa \leq \mu < \Theta$. Des Weiteren sei $X \subseteq H_\Theta$ mit $|X| \leq \mu$. Für alle $\xi \leq \kappa$ sei $Y_\xi \subseteq H_\Theta$ mit $|Y_\xi| \leq \mu$.*
Dann gibt es eine elementare Kette $(\mathfrak{M}_\eta)_{\eta\leq\kappa}$, so dass $< M_\eta|\eta \leq \xi > \in M_{\xi+1}$, $X \subseteq M_0$, $Y_\xi \subseteq M_{\xi+1}$ und $|M_\xi| = \mu$ für alle $\xi \leq \kappa$. Außerdem ist $\mathfrak{M}_\xi = \bigcup\{M_\eta|\eta \leq \xi\}$.

Beweis. Der Beweis dieses Lemmas erfolgt rekursiv:
Es gilt: max $\aleph_0, |S|, |X| < \mu$ sowie $\mu < \Theta \Rightarrow \mu \in H_\Theta \Rightarrow \mu \leq |H_\Theta|$. Wir wenden den Satz von Löwenheim-Skolem an und erhalten eine Struktur $\mathfrak{M}_0 \prec H_\Theta$ mit $X \subseteq \mathfrak{M}_0$ und $|M_0| = \mu$.
Im Nachfolgerschritt von ξ zu $\xi + 1$ beachte man zunächst, dass $\mathfrak{M}_\xi \subseteq H_\Theta$. Da $< M_\eta|\eta \leq \xi > \subset H_\Theta$ und $| < M_\eta|\eta \leq \xi > | < \Theta$, gilt $< M_\eta|\eta \leq \xi > \in H_\Theta$. Somit folgt $M_\xi \cup Y_\xi \cup \{< M_\eta|\eta \leq \xi >\} \in H_\Theta$. Aucserdem gilt $\mu \leq |M_\xi \cup Y_\xi \cup \{< M_\eta|\eta \leq \xi >\}| \leq$

$|M_\xi| + |Y_\xi| + 1 = \mu$. Also können wir den Satz von Löwenheim-Skolem anwenden und erhalten ein $\mathfrak{M}_{\xi+1} \prec H_\Theta$ mit $M_\xi \cup Y_\xi \cup \{< M_\eta | \eta \leq \xi >\} \in \mathfrak{M}_{\xi+1}$ und $|\mathfrak{M}_{\xi+1}| = \mu$
Ist $\xi < \kappa$ Limes, so ist $|\bigcup\{M_\eta | \eta \leq \xi\} \leq \mu$. Zu zeigen bleibt, dass die eine elementare Substruktur von H_Θ ist. Es ist offensichlich, dass es sich bei obigem Limes um eine Substruktur von H_Θ handelt. Sei nun $\varphi(x_1 \ldots x_n]$ eine Formel mit $\bigcup\{M_\eta | \eta \leq \xi\} \models \varphi[m_1 \ldots m_n]$. Dann gibt es ein $\eta \leq \xi$, so dass $m_1 \ldots m_n \in M_\eta$. Aus dem Satz über den Limer einer elementaren Kette wissen wir, dass $\mathfrak{M}_\eta \prec \bigcup\{M_\eta | \eta \leq \xi\}$, also insbesondere $\bigcup\{M_\eta | \eta \leq \xi\} \models \varphi[m_1 \ldots m_n \Leftrightarrow \mathfrak{M}_\eta \models \varphi[m_1 \ldots m_n]$. Da $\mathfrak{M}_\eta \prec H_\Theta$, gilt auch $\mathfrak{M}_\eta \models \varphi[m_1 \ldots m_n] \Leftrightarrow H_{/Theta} \models \varphi[m_1 \ldots m_n]$. Die Behauptung ist somit gezeigt. □

Wir wollen folgendes Lemma beweisen:

Lemma 4. *Sei A eine unendliche Menge, I ein Ideal über A, $\lambda < 2^{|A|}$ reguläre Kardinalzahl. Dann hat jede bezüglich $<_I$ aufsteigende Folge von Ordinalzahlfunktionen von A eine exakte obere Schranke.*

Sei $F =< f_\alpha | \alpha \leq \lambda >$ eine bezüglich $<_I$ aufsteigende Folge. Der Beweis dieses Lemmas erfolgt mit Hilfe einer elementaren Substruktur von H_Θ, welche wie folgt konstruiert wird:
Zunächst wählen wir eine überabzählbare, reguläre Kardinalzahl Θ, die groß genug ist, so dass $\{I\} \cup \{F\} \subseteq H_\Theta$ und $|A| \leq 2^{|A|} \leq \Theta$. Definiere nun $Y_\xi := \{f : |A| \longrightarrow M_\xi\}$. Nach dem vorangegangenen Lemma existiert eine elementare Kette $(M_\eta)_{\eta \leq |A|}$ mit $< M_\eta | \eta \leq \xi > \in M_{\xi+1}$, $I \in M_0$, $F \in M_0$, $|M_\eta| = 2^|A||$ und $\{f : |A| \longrightarrow M_\xi\} \subseteq M_{\xi+1}$. Wir bilden den Limes dieser Kette und erhalten eine Struktur $\mathfrak{M} \prec H_\Theta$ mit $I \in M$, $F \in M$, $|M| = 2^|A|$ und $M^|A| \leq M$.