Ordinalzahlfunktionen und Scales I

Cecilia Bohler

19. Mai 2009

Sei A eine unendliche Menge und sei I ein Ideal auf A.

Definition 1 *Für Ordinalzahlfunktionen f und g auf A seien*

$$\begin{aligned} f =_I g &\Leftrightarrow \{a \in A : f(a) \neq g(A)\} \in I, \\ f \leq_I g &\Leftrightarrow \{a \in A : f(a) > g(a)\} \in I, \\ f <_I g &\Leftrightarrow \{a \in A : f(a) \geq g(a)\} \in I. \end{aligned}$$

Bemerkung 1 *Die Relationen $\leq_I$ und $<_I$ sind partielle Ordnungen (von Äquivalenzklassen).*
Wenn I das nichstationäre Ideal auf einer regulären überabzählbaren Kardinalzahl κ ist, dann ist der Rang einer Ordinalzahlfunktion f auf κ die (Galvin-Hajnal-) Norm $||f||$.

Definition 2 *Sei S eine Menge von Ordinalzahlfunktionen auf A. Dann ist g eine* obere Schranke *von S, wenn $f \leq_I g$ für alle $f \in S$. g ist* kleinste obere Schranke *von S, wenn g obere Schranke ist und $g \leq_I h$ für alle oberen Schranken h gilt.*

Lemma 1 *Sei κ reguläre überabzählbare Kardinalzahl und I_{NS} das Ideal der nichtstationären Mengen. Dann gibt es Ordinalzahlfunktionen f_η, $\eta < \kappa^+$ auf κ, so dass gilt:*

(i) $f_0(\alpha) = 0$ *für alle* $\alpha < \kappa$

(ii) $f_{\eta+1}(\alpha) = f_\eta(\alpha) + 1$ *für alle* $\alpha < \kappa$

(iii) für η Limesordinalzahl ist f_η die kleinste obere Schranke von $\{f_\xi : \xi < \eta\}$ in $\leq_{I_{NS}}$

Die Funktionen sind eindeutig bis auf $=_{I_{NS}}$ und für jede stationäre Menge $S \subset \kappa$ ist $||f_\eta||_S = \eta$.

Beweis. Sei $\langle \xi_\nu : \nu < \text{cf } \eta \rangle$ eine Folge mit Limes η.
Falls cf $\eta < \kappa$ sei $f_\eta(\alpha) = sup\{f_{\xi_\nu}(\alpha) : \nu < \text{cf } \eta\}$.
Falls cf $\eta = \kappa$ sei $f_\eta(\alpha) = sup\{f_{\xi_\nu}(\alpha) : \nu < \alpha\}$ für jede Limesordinalzahl α, genannt der *diagonale Limes* von f_ξ, $\xi < \eta$.

□

Definition 3 *Sei $(P, <)$ eine partiell geordnete Menge, $A \subset P$. Dann ist A* konfinal *in $(P, <)$, wenn für alle $p \in P$ ein $a \in A$ existiert, so dass $p \leq a$. Die* Konfinalität *von $(P, <)$ ist die minimale Größe einer konfinalen Menge. Die* wahre Konfinalität *von $(P, <)$ ist die kleinste Kardinalität einer konfinalen Kette, sofern sie existiert.*

Sei wieder A eine unendliche Menge, I ein Ideal auf A und $\{\gamma_a : a \in A\}$ eine Menge von Ordinalzahlen.

Definition 4 *Ein* Scale *in* $\prod_{a\in A}\gamma_a$ *ist eine* $<_I$*-wachsende transfinite Folge* $\langle f_\alpha : \alpha < \lambda\rangle$ *von Funktionen in* $\prod_{a\in A}\gamma_a$*, die konfinal sind in* $\prod_{a\in A}\gamma_a$ *mit der partiellen Ordnung* $<_I$*.*

Bemerkung 2 *Wenn es in* $\prod_{a\in A}\gamma_a$ *ein* λ*-Scale, ein Scale der Länge* λ*, gibt mit* λ *reguläre Kardinalzahl, dann hat es die* wahre Konfinalität λ *und ist* λ-gerichtet*.*

Definition 5 *Sei* $(P,<)$ *eine partiell geordnete Menge. Dann ist* g *eine* exakte obere Schranke *der Teilmenge* S*, wenn* S *konfinal ist in der Menge* $\{f \in P : f < g\}$*.*

Theorem 1 (Shelah) *Sei* κ *eine starke Limeskardinalzahl mit Konfinalität* ω*. Es existiert eine wachsende Folge* $\langle\lambda_n : n < \omega\rangle$ *von regulären Kardinalzahlen mit Limes* κ*, so dass die wahre Konfinalität von* $\prod_{n<\omega}\lambda_n$*, modulo dem Ideal der endlichen Mengen, gleich ist mit* κ^+*.*

Beweis. Sei I das Ideal der endlichen Mengen. Wir konstruieren die λ_n's und ein κ^+-Scale in $\prod_{n<\omega}\lambda_n$ in der partiellen Ordnung $<_I$.
Zunächst wählen wir eine beliebige wachsende Folge $\langle\kappa_n : n < \omega\rangle$ von regulären Kardinalzahlen mit Limes κ. Da jede Teilmenge von $\prod_{n<\omega}\kappa_n$ der Größe κ eine obere Schranke in $(\prod_{n<\omega}\kappa_n, <_I)$ besitzt, können wir induktiv eine $<_I$-wachsende κ^+-Folge $F = \langle f_\xi : \xi < \kappa^+\rangle$ von Funktionen in $\prod_{n<\omega}\kappa_n$ konstruieren.

Lemma 2 *Es gibt eine Funktion* $g : \omega \to \kappa$*, die eine obere Schranke von* F *in* $<_I$ *und zusätzlich* $\leq_I$*-minimal unter solchen oberen Schranken ist.*

Beweis. Sei $g_0 = \langle\kappa_n : n < \omega\rangle$. Wir wollen eine maximal transfinite $\leq_I$-fallende Folge $\langle g_\nu\rangle_\nu$ von oberen Schranken von F konstruieren. Es genügt dann zu zeigen, dass die Länge der Folge $\langle g_\nu\rangle_\nu$ keine Limesordinalzahl ist, denn dann ist die letzte Funktion $\leq_I$-minimal.
Sei also ϑ eine Limesordinalzahl und sei $\langle g_\nu : \nu < \vartheta\rangle$ eine $\leq_I$-fallende Folge von oberen Schranken von F. Wir wollen eine Funktion g finden, so dass $g >_I f_\xi$ für alle $\xi < \kappa^+$ und $g \leq_I g_\nu$ für alle $\nu < \vartheta$.

Zunächst zeigen wir die Behauptung $|\vartheta| \leq 2^{\aleph_0}$: Wir nehmen an, dass $|\vartheta| \geq (2^{\aleph_0})^+$ und wählen die Partition $G : [\vartheta]^2 \to \omega$, wie folgt definiert (für $\alpha < \beta$):

$$G(\alpha,\beta) = \text{das kleinste } n, \text{ so dass } g_\alpha(n) > g_\beta(n)$$

Nach dem Satz von Erdös-Rado existiert eine unendliche Menge von Ordinalzahlen $\alpha_0 < \alpha_1 < ...$, so dass für manche $n, g_{\alpha_0}(n) > g_{\alpha_1}(n) > g_{\alpha_2}(n) > ...$, also Widerspruch.

Sei nun $A = \bigcup_{\nu<\vartheta}\operatorname{ran}(g_\nu)$ und sei $S = A^\omega$. Mit $|\vartheta| < 2^{\aleph_0}$ folgt $|S| \leq |\vartheta^\omega| \leq 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.
Für jedes $g \in S$, so dass g keine obere Schranke von F ist, sei ξ_g so dass $f_{\xi_g} \not<_I g$. Da $|S| \leq 2^{\aleph_0}$, existiert ein $\eta < \kappa^+$ größer als alle ξ_g. Sei nun

$$g(n) = \text{das kleinste } \gamma \in A, \text{ so dass } \gamma > f_\eta(n).$$

Die Funktion g ist eine obere Schranke von F: Angenommen nicht, also $f_{\xi_g} \not<_I g$. Es gilt aber $f_{\xi_g} <_I f_\eta <_I g$, also Widerspruch.
Zuletzt muss nur noch gezeigt werden, dass $g \leq_I g_\nu$ für alle $\nu < \vartheta$. Wenn $\nu < \vartheta$, dann $g_\nu(n) > f_\eta(n)$ für alle bis auf endlich viele n und da $g_\nu(n) \in A$ gilt $g_\nu \geq_I g$.

□

Weiter im Beweis des Theorems von Shelah. Sei g die Funktion gegeben durch das vorherige Lemma. Wir behaupten, dass g eine exakte obere Schranke von F ist: Angenommen nicht, dann sei $f <_I g$ mit $f \not\leq f_\xi$ für alle ξ. Für jedes $\xi < \kappa^+$, sei A_ξ die unendliche Menge aller n, für die $f(n) > f_\xi(n)$. Da $2^{\aleph_0} < \kappa$ existiert eine unendliche Menge A, so dass für κ^+-viele ξ $f(n) > f_\xi(n)$ für alle $n \in A$ gilt. Es folgt, dass $f_{|A} >_I f_{\xi|A}$ für alle $\xi < \kappa^+$ und damit ist die Funktion $g' = f_{|A} \cup g_{|(\omega - A)} \leq_I g$ eine obere Schranke von F, aber $g' \neq g$, also Widerspruch.
Falls g schon eine wachsende Folge ist mit Limes κ und jedes $g(n)$ eine reguläre Kardinalzahl ist, setze $\lambda_n = g(n)$ und wir sind fertig. Im allgemeinen jedoch sind alle bis auf endlich viele $g(n)$ Limesordinalzahlen. O.B.d.A. seien alle $g(n)$ Limesordinalzahlen. Für jedes n sei Y_n eine abgeschlossene unbeschränkte Teilmenge von $g(n)$, mit der Kardinalität einer reguläre Kardinalzahl γ_n ist. Es muss gelten $\sup_n \gamma_n = \kappa$, da sonst $|\prod_n Y_n| < \kappa$ und somit beschränkt ist durch ein f_ξ.
Also sei $\langle \lambda_n : n < \omega \rangle = \langle \gamma_{k_n} : n < \omega \rangle$ eine wachsende Teilfolge von $\langle \gamma_n \rangle_n$.
Für jedes $f \in F$, sei h_f die Funktion definiert durch:

$$h_f(n) = \text{das kleinste } \alpha \in Y_{k_n}, \text{ so dass } \alpha \geq f(k_n).$$

und sei $H = \{h_f : f \in F\}$. Für jedes $f \in \prod_n Y_n$ existiert dann ein $h \in H$, so dass $f <_I h$. Also $|H| = \kappa^+$, da jede kleinere Menge von Funktionen beschränkt ist durch ein f_ξ.
Also können wir in H eine $\leq_I$-wachsende transfinfite Folge $\langle h_\xi : \xi < \kappa^+ \rangle$ finden, so dass es für jedes $f \in \prod_n Y_n$ ein ξ gibt mit $f <_I h_\xi$. Übertragen wir nun $\prod_n Y_n$ auf $\prod_n \lambda_n$ erhalten wir eine Folge $\langle h_\xi : \xi < \kappa^+ \rangle$ mit den gewünschten Eigenschaften.

□