Hauptseminar Mathematische Logik
Pcf Theorie (S2A2)
Das Galvin-Hajnal Theorem

Jonas Fiege

21. Juli 2009

Theorem 1 (Galvin-Hajnal [1975]). *Sei $\aleph_\alpha$ eine singuläre, starke Limes-Kardinalzahl mit überabzählbarer Konfinalität. Dann gilt $2^{\aleph_\alpha} < \aleph_\gamma$ für $\gamma = \left(2^{|\alpha|}\right)^+$.*

Lemma 2 (24.2). *Angenommen es gilt $\aleph_\alpha^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$ für alle $\alpha < \omega_1$. Sei F eine fast disjunkte Familie von Funktionen*

$$F \subset \prod_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$$

sodass $|A_\alpha| < \aleph_{\omega_1}$ für alle $\alpha < \omega_1$. Dann gilt $|F| < \aleph_\gamma$ für $\gamma = \left(2^{\aleph_1}\right)^+$.

Zunächst führen wir folgende Relation zwischen Funktionen $\varphi : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ ein.

Definition 3. Sei $S \subset \omega_1$. Es gilt

$$\psi <_S \varphi$$

genau dann, wenn die Menge

$$\{\alpha \in S : \psi(\alpha) \geq \varphi(\alpha)\}$$

nicht-stationär ist. Für $S = \omega_1$ schreiben wir kurz $\psi < \varphi$. Da die nicht-stationären Teilmengen von ω_1 ein Ideal bilden, gilt für alle $S, T \subset \omega_1$

$$\psi <_{S\cup T} \varphi \longleftrightarrow \psi <_S \varphi \wedge \psi <_T \varphi.$$

Lemma 4. *Ist $S \subset \omega_1$ stationär so ist die Relation $<_S$ wohlfundiert.*

Beweis. Wir behandeln zunächst den Fall $S = \omega_1$. Angenommen es existiert eine unendlich absteigende Folge von Funktionen

$$\varphi_0 > \varphi_1 > \varphi_2 > \dots$$

Demnach ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$A_n := \{\alpha \in \omega_1 : \varphi_{n+1}(\alpha) \geq \varphi_n(\alpha)\}$$

nicht-stationär. Da das nicht-stationäre Ideal auf ω_1 dual zum closed-unbounded Filter auf ω_1 ist, ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$\begin{aligned} B_n &:= \omega_1 - A_n \\ &= \{\alpha \in \omega_1 : \varphi_{n+1}(\alpha) < \varphi_n(\alpha)\} \end{aligned}$$

closed-unbounded. Da der closed-unbounded Filter σ-vollständig ist, ist auch der Schnitt der B_n closed-unbounded und daher nichtleer. Somit existiert ein $\alpha \in \omega_1$ mit

$$\varphi_0(\alpha) > \varphi_1(\alpha) > \varphi_2(\alpha) > \dots$$

Dies ist aber ein Widerspruch zum Fundierungsaxiom.

Ist $S \neq \omega_1$ existiert immer noch ein solches α, da der Schnitt der stationären Menge S und der closed-unbounded Menge $\bigcap_{i=1}^{\infty} B_n$ per Definition nichtleer ist. $\square$

Definition 5. Ist $S \subset \omega_1$ stationär können wir per wohlfundierter Rekursion die Norm von φ definieren durch

$$\|\varphi\|_S = \sup \{\|\psi\|_S + 1 : \psi <_S \varphi\} .$$

Für $S = \omega_1$ schreiben wir kurz $\|\varphi\|$. Es ist $\|\varphi\|_S = 0$ genau dann, wenn φ $<_S$-minimal ist. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn φ auf einer stationären Teilmenge von S verschwindet. Aus $\psi <_S \varphi$ folgt $\|\psi\|_S < \|\varphi\|_S$.

Bemerkung 6. Ist $S \subset \omega_1$ stationär und $\psi(\alpha) \leq \varphi(\alpha)$ für alle $\alpha \in S$ dann gilt $\|\psi\|_S \leq \|\varphi\|_S$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \forall \chi : \{\alpha \in S : \chi(\alpha) \geq \psi(\alpha)\} &\supset \{\alpha \in S : \chi(\alpha) \geq \varphi(\alpha)\} \\ \implies \forall \chi : \chi <_S \psi &\longrightarrow \chi <_S \varphi \\ \implies \operatorname{ext}_{<_S} \psi &\subset \operatorname{ext}_{<_S} \varphi \\ \implies \|\psi\|_S &\leq \|\varphi\|_S . \end{aligned}$$

□

Bemerkung 7. Sind $S \subset T \subset \omega_1$ stationär dann gilt $\|\varphi\|_T \leq \|\varphi\|_S$. Insbesondere gilt $\|\varphi\| \leq \|\varphi\|_S$.

Beweis per wohlfundierter Induktion. Aus $\psi <_T \varphi$ folgt $\psi <_S \varphi$. Angenommen die Aussage ist für alle $\psi <_S \varphi$ wahr. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_T &= \sup \{\|\psi\|_T + 1 : \psi <_T \varphi\} \\ &\leq \sup \{\|\psi\|_T + 1 : \psi <_S \varphi\} \\ &\leq \sup \{\|\psi\|_S + 1 : \psi <_S \varphi\} \\ &= \|\varphi\|_S . \end{aligned}$$

□

Lemma 8. *Sind $S, T \subset \omega_1$ stationär so gilt $\|\varphi\|_{S \cup T} = \min \{\|\varphi\|_S , \|\varphi\|_T\}$.*

Beweis. Die Abschätzung $\|\varphi\|_{S \cup T} \leq \min \{\|\varphi\|_S , \|\varphi\|_T\}$ folgt aus der letzten Bemerkung. Sei φ ein kleinstes Element mit $\|\varphi\|_{S \cup T} < \min \{\|\varphi\|_S , \|\varphi\|_T\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{S \cup T} &= \sup \{\|\psi\|_{S \cup T} + 1 : \psi <_{S \cup T} \varphi\} \\ &= \sup \{\min \{\|\psi\|_S , \|\psi\|_T\} + 1 : \psi <_{S \cup T} \varphi\} \\ &< \min \{\|\varphi\|_S , \|\varphi\|_T\} . \end{aligned}$$

Folglich existiert ein $\psi_S <_S \varphi$ und ein $\psi_T <_T \varphi$ mit

$$\|\varphi\|_{S \cup T} < \min \{\|\psi_S\|_S + 1, \|\psi_T\|_T + 1\} .$$

Wir definieren die Funktion

$$\psi_{S\cup T}(\alpha) = \begin{cases} \psi_S(\alpha) & \alpha \in S \setminus T \\ \max\{\psi_S(\alpha), \psi_T(\alpha)\} & \alpha \in S \cap T \\ \psi_T(\alpha) & \alpha \in T \setminus S \end{cases}.$$

Per Definition gilt $\psi_S(\alpha) \leq \psi_{S\cup T}(\alpha)$ für alle $\alpha \in S$. Aufgrund von Bemerkung 6 gilt demnach $\|\psi_S\|_S \leq \|\psi_{S\cup T}\|_S$. Analog zeigt man $\|\psi_T\|_T \leq \|\psi_{S\cup T}\|_T$. Offenbar gilt

$$\{\alpha \in S : \psi_{S\cup T}(\alpha) \geq \varphi(\alpha)\} \subset \{\alpha \in S : \psi_S(\alpha) \geq \varphi(\alpha)\} \cup \{\alpha \in T : \psi_T(\alpha) \geq \varphi(\alpha)\}.$$

Die obige Menge ist als Teilmenge einer nicht-stationären Menge ebenfalls nicht-stationär. Demnach gilt $\psi_{S\cup T} <_S \varphi$ und analog können wir $\psi_{S\cup T} <_T \varphi$ zeigen. Also gilt $\psi_{S\cup T} <_{S\cup T} \varphi$ und es folgt

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{S\cup T} &= \sup\{\min\{\|\psi\|_S, \|\psi\|_T\} + 1 : \psi <_{S\cup T} \varphi\} \\ &\geq \min\{\|\psi_{S\cup T}\|_S, \|\psi_{S\cup T}\|_T\} + 1 \\ &\geq \min\{\|\psi_S\|_S + 1, \|\psi_T\|_T + 1\} \\ &> \|\varphi\|_{S\cup T}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 9. Ist S stationär und X nicht-stationär so gilt $\|\varphi\|_{S\cup X} = \|\varphi\|_S$.

Beweis. Wie man sich leicht überlegt gilt $\psi <_{S\cup X} \varphi \longleftrightarrow \psi <_S \varphi$ oder anders ausgedrückt $\mathrm{ext}_{<_{S\cup X}} \varphi = \mathrm{ext}_{<_S} \varphi$. Per wohlfundierter Induktion folgt sofort $\|\varphi\|_{S\cup X} = \|\varphi\|_S$. □

Definition 10. Für jede Funktion $\varphi : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ sei I_φ das Ideal aller nicht-stationären Mengen auf ω_1 nebst aller stationären Mengen $S \subset \omega_1$ mit $\|\varphi\| < \|\varphi\|_S$. Das Komplement von I_φ in $\mathcal{P}(\omega_1)$ ist demnach die Menge aller stationären Teilmengen $S \subset \omega_1$ mit $\|\varphi\| = \|\varphi\|_S$.

Beweis. Per Definition ist ω_1 nicht in I_φ enthalten. Lemma 8 und Bemerkung 9 stellen sicher, dass I_φ abgeschlossen unter Vereinigungen ist. Bemerkung 7 garantiert, dass jede Teilmenge eines Elementes von I_φ wieder in I_φ liegt. □

Lemma 11. *Sei*

$$\begin{aligned} S &= \{\alpha < \omega_1 : \varphi(\alpha) \textit{ ist Nachfolger-Ordinalzahl}\} \\ L &= \{\alpha < \omega_1 : \varphi(\alpha) \textit{ ist Limes-Ordinalzahl}\}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\|\varphi\| \textit{ ist Limes-Ordinalzahl} \longleftrightarrow L \notin I_\varphi$$

bzw.

$$\|\varphi\| \textit{ ist Nachfolger-Ordinalzahl} \longleftrightarrow S \notin I_\varphi.$$

Beweis. (i) Angenommen es gilt $S \notin I_\varphi$. Folglich ist S stationär und es gilt $\|\varphi\| = \|\varphi\|_S$. Sei nun $\varphi_-(\alpha) = \varphi(\alpha) - 1$ für alle $\alpha \in S$. Per Definition gilt $\varphi_- <_S \varphi$ und demnach $\|\varphi_-\|_S < \|\varphi\|_S$. Wir wollen zeigen, dass $\|\varphi_-\|_S + 1 = \|\varphi\|_S$ gilt. Es genügt zu zeigen, dass aus $\psi <_S \varphi$ stets $\|\psi\|_S \leq \|\varphi_-\|_S$ folgt. Offensichtlich gilt

$$\{\alpha \in S : \psi(\alpha) \geq \varphi(\alpha) - 1\} \supset \{\alpha \in S : \psi(\alpha) \geq \varphi(\alpha)\}$$

und somit folgt aus $\psi <_S \varphi_-$ stets $\psi <_S \varphi$. Daher können wir uns auf den Fall $\psi <_S \varphi$ und $\psi \not<_S \varphi_-$ beschränken. Demnach ist die Menge $\{\alpha \in S : \psi(\alpha) \geq \varphi(\alpha)\}$ nicht-stationär im Gegensatz zu

$$\{\alpha \in S : \psi(\alpha) \geq \varphi(\alpha) - 1\} = \{\alpha \in S : \psi(\alpha) = \varphi(\alpha) - 1\} \cup \underbrace{\{\alpha \in S : \psi(\alpha) \geq \varphi(\alpha)\}}_{X:=}.$$

Folglich ist die Menge $\{\alpha \in S : \psi(\alpha) = \varphi(\alpha) - 1\}$ stationär. Wir definieren $S' = \{\alpha \in S : \psi(\alpha) \leq \varphi(\alpha) - 1\}$. Offensichtlich ist S' stationär und es gilt $S = S' \cup X$. Unter Verwendung von Bemerkung 6,7 und 9 folgt

$$\begin{aligned} \|\psi\|_S &\leq \|\psi\|_{S'} \\ &\leq \|\varphi_-\|_{S'} \\ &= \|\varphi_-\|_S . \end{aligned}$$

(ii) Angenommen es gilt $L \notin I_\varphi$. Folglich ist L stationär und es gilt $\|\varphi\| = \|\varphi\|_L$. Wir wollen zeigen, dass $\|\varphi\|_L$ Limes-Ordinalzahl ist. Dies ist der Fall genau dann, wenn für alle $\psi <_L \varphi$ ein $\psi' <_L \varphi$ existiert mit $\|\psi\|_L < \|\psi'\|_L$. Sei dazu $\psi_+(\alpha) = \psi(\alpha) + 1$ für alle $\alpha \in L$. Per Definition gilt $\psi <_L \psi_+$ und demnach $\|\psi\|_L < \|\psi_+\|_L$. Laut Voraussetzung ist die Menge $\{\alpha \in L : \psi(\alpha) \geq \varphi(\alpha)\}$ nicht-stationär und für alle $\alpha \in L$ ist $\varphi(\alpha)$ Limes-Ordinalzahl. Also gilt

$$\{\alpha \in L : \psi(\alpha) \geq \varphi(\alpha)\} = \{\alpha \in L : \psi(\alpha) + 1 \geq \varphi(\alpha)\}$$

und demnach ist $\psi_+ <_L \varphi$.

□

Lemma 12 (8.16)**.** *Angenommen es gilt $\aleph_\alpha^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$ für alle $\alpha < \omega_1$. Sei F eine fast disjunkte Familie von Funktionen*

$$F \subset \prod_{\alpha < \omega_1} A_\alpha$$

sodass die Menge

$$\{\alpha < \omega_1 : |A_\alpha| \leq \aleph_\alpha\}$$

stationär ist. Dann gilt $|F| \leq \aleph_{\omega_1}$.

Lemma 13 (24.3). *Angenommen es gilt* $\aleph_\alpha^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$ *für alle* $\alpha < \omega_1$. *Sei* $\varphi : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ *und* F *eine fast disjunkte Familie von Funktionen*

$$F \subset \prod_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$$

sodass $|A_\alpha| \leq \aleph_{\alpha+\varphi(\alpha)}$ *für alle* $\alpha < \omega_1$. *Dann gilt* $|F| \leq \aleph_{\omega_1+\|\varphi\|}$.

Um Lemma 2 aus Lemma 13 herzuleiten, sei φ mit $|A_\alpha| \leq \aleph_{\alpha+\varphi(\alpha)}$ für alle $\alpha < \omega_1$. Ist ϑ die Länge der wohlfundierten Relation $\varphi < \psi$ gilt zweifelslos $|\vartheta| \leq 2^{\aleph_1}$ und demnach $\vartheta < \left(2^{\aleph_1}\right)^+$. Daher gilt $\omega_1 + \|\varphi\| < \left(2^{\aleph_1}\right)^+$ für alle φ. Hieraus folgt Lemma 2.

Beweis. Wir beweisen Lemma 13 per Induktion nach $\|\varphi\|$.

(i) Es gilt $\|\varphi\| = 0$ genau dann, wenn φ auf einer stationären Teilmenge von ω_1 verschwindet. Folglich ist die Menge $\{\alpha < \omega_1 : |A_\alpha| \leq \aleph_\alpha\}$ stationär und die Behauptung folgt aus Lemma 12.

(ii) Sei $\|\varphi\|$ eine Limes-Ordinalzahl und $\|\varphi\| > 0$. Folglich ist die Menge aller α mit $\varphi(\alpha) = 0$ nicht-stationär. Demnach folgt unter Verwendung von Lemma 11, dass die Menge

$$S = \{\alpha < \omega : \varphi(\alpha) > 0 \text{ ist Limes-Ordinalzahl}\}$$

nicht in I_φ liegt. Laut Voraussetzung gilt $|A_\alpha| \leq \aleph_{\alpha+\varphi(\alpha)}$ für alle $\alpha < \omega_1$. Folglich dürfen wir annehmen, dass A_α für alle $\alpha < \omega_1$ eine Teilmenge von $\aleph_{\alpha+\varphi(\alpha)}$ ist. Daher gilt $f(\alpha) < \aleph_{\alpha+\varphi(\alpha)}$ für alle $f \in F$. Ist $f \in F$ gegeben existiert für jedes $\alpha \in S$ ein $\beta < \varphi(\alpha)$ mit $f(\alpha) < \omega_{\alpha+\beta}$ und wir definieren $\psi(\alpha) = \beta$. Für $\alpha \notin S$ sei $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$. Offensichtlich gilt $\psi <_S \varphi$ und wegen $S \notin I_\varphi$ folgt $\|\psi\| \leq \|\psi\|_S < \|\varphi\|_S = \|\varphi\|$. Demnach ist $f \in F_\psi$ wobei

$$F_\psi = \left\{f \in F : f(\alpha) < \omega_{\alpha+\psi(\alpha)} \text{ für alle } \alpha\right\}.$$

Da jedes $f \in F$ in solch einem F_ψ enthalten ist gilt

$$F = \bigcup \{F_\psi : \|\psi\| < \|\varphi\|\}.$$

Laut Induktionsvoraussetzung gilt $|F_\psi| \leq \aleph_{\omega_1+\|\psi\|} < \aleph_{\omega_1+\|\varphi\|}$ für alle $\|\psi\| < \|\varphi\|$. Da die Anzahl der Funktionen $\psi : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ gerade $2^{\aleph_1}$ ist und $2^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$ gilt erhalten wir $|F| \leq \aleph_{\omega_1+\|\varphi\|}$.

(iii) Sei $\|\varphi\| = \gamma + 1$ ein Nachfolger-Ordinalzahl und

$$S_0 = \{\alpha < \omega_1 : \varphi(\alpha) \text{ ist Nachfolger-Ordinalzahl}\}.$$

Laut Lemma 11 gilt $S_0 \notin I_\varphi$. Wieder dürfen wir annehmen, dass A_α für alle $\alpha < \omega_1$ eine Teilmenge von $\aleph_{\alpha+\varphi(\alpha)}$ ist. Daher gilt $f(\alpha) < \aleph_{\alpha+\varphi(\alpha)}$ für alle $f \in F$. Wir zeigen zunächst, dass für alle $f \in F$ die Menge

$$F_f = \{g \in F : \exists S \subset S_0, S \notin I_\varphi, (\forall \alpha \in S)\, g(\alpha) \leq f(\alpha)\}$$

die Kardinalität $\aleph_{\omega_1+\gamma}$ besitzt. Für $S \subset S_0$ und $S \notin I_\varphi$ definieren wir die Menge

$$F_{f,S} = \{g \in F : (\forall \alpha \in S)\, g(\alpha) \leq f(\alpha)\}.$$

Sei nun $\psi : \omega_1 \longrightarrow \omega_1$ definiert durch $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha) - 1$ für alle $\alpha \in S$ und $\psi(\alpha) = \varphi(\alpha)$ sonst. Wegen $S \notin I_\varphi$ gilt $\|\psi\| \leq \|\psi\|_S < \|\varphi\|_S = \|\varphi\| = \gamma+1$. Wie im Beweis von Lemma 11 folgt $\|\psi\|_S + 1 = \|\varphi\|_S$ und daher gilt $\|\psi\| \leq \gamma$. Nun gilt $F_{f,S} \subset \prod_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$ mit $|B_\alpha| \leq \aleph_{\alpha+\psi(\alpha)}$ für alle $\alpha < \omega_1$. Laut Induktionsvoraussetzung gilt demnach $|F_{f,S}| \leq \aleph_{\omega_1+\gamma}$. Da die Anzahl der Teilmengen von S_0 kleiner als $2^{\aleph_1}$ ist und $2^{\aleph_1} < \aleph_{\omega_1}$ gilt erhalten wir $|F_f| \leq 2^{\aleph_1} \cdot \aleph_{\omega_1+\gamma} = \aleph_{\omega_1+\gamma}$. Um den Beweis zu vollenden konstruieren wir eine Folge

$$\langle f_\xi : \xi < \vartheta \rangle$$

sodass $\vartheta \leq \aleph_{\omega_1+\gamma+1}$ und

$$F = \bigcup \left\{ F_{f_\xi} : \xi < \vartheta \right\}.$$

Zu gegebenen $f_\nu, \nu < \xi$ sei $f_\xi \in F$ (falls es existiert) derartig, dass $f_\xi \notin F_{f_\nu}$ für alle $\nu < \xi$. Demnach gilt:

$$\begin{aligned}
& \forall \nu < \xi : f_\xi \notin F_{f_\nu} \\
\Longleftrightarrow\; & \forall \nu < \xi : \neg\left(\exists S : S \subset S_0 \wedge S \notin I_\varphi \wedge \forall \alpha\, (\alpha \in S \rightarrow f_\xi(\alpha) \leq f_\nu(\alpha))\right) \\
\Longleftrightarrow\; & \forall \nu < \xi : \forall S : S \not\subset S_0 \vee S \in I_\varphi \vee \exists \alpha\, (\alpha \in S \wedge f_\xi(\alpha) > f_\nu(\alpha)).
\end{aligned}$$

Daher ist die Menge $\{\alpha \in S_0 : f_\xi(\alpha) \leq f_\nu(\alpha)\}$ ein Element von I_φ. Folglich ist die Menge $\{\alpha \in S_0 : f_\xi(\alpha) > f_\nu(\alpha)\}$ kein Element von I_φ, da andernfalls entgegen der Voraussetzung S_0 in I_φ liegen würde. Also gilt $f_\nu \in F_{f_\xi}$ für alle $\nu < \xi$. Nun ist $\left|F_{f_\xi}\right| \leq \aleph_{\omega_1+\gamma}$ und $F_{f_\xi} \supset \{f_\nu : \nu < \xi\}$. Somit ist $\xi < \aleph_{\omega_1+\gamma+1}$, falls f_ξ existiert. Daher hat unsere Folge die Länge $\vartheta \leq \aleph_{\omega_1+\gamma+1}$. Also gilt

$$F = \bigcup \left\{ F_{f_\xi} : \xi < \vartheta \right\}$$

und somit $|F| \leq \aleph_{\omega_1+\gamma+1}$.

$\square$