Messbare Kardinalzahlen und GCH

1 Ultrapotenzen und elementare Einbettungen

Sei stets κ Kardinalzahl und U ein Ultrafilter auf κ.

Definition 1.1. *Für f, $g : \kappa \to V$ wird definiert:*

$$\begin{aligned} f =^* g &:\Leftrightarrow \{x \in \kappa \mid f(x) \ = \ g(x)\} \in U \\ f \in^* g &:\Leftrightarrow \{x \in \kappa \mid f(x) \in g(x)\} \in U \\ [f] &:= \{g \mid f =^* g \wedge \forall h \ (h =^* f \to \text{rank } g \leq \text{rank } h)\} \end{aligned}$$

Weiter sei $Ult = Ult_U(V)$ die Klasse aller $[f]$ mit $f : \kappa \to V$.

Erinnerung 1.2. *Sei C eine Klasse, $C \neq \emptyset$. Wähle ein $y \in C$ von minimalem Rang α. Dann gilt:*

$$\emptyset \neq \hat{C} := \{x \in C \mid \text{rank } x = \alpha\} = \{x \in C \mid \forall z \in C \text{ rank } x \leq \text{rank } x\} \subseteq V_{\alpha+1} \Rightarrow \hat{C} \in V$$

Proposition 1.3. *Es sind $(V, \in)$ und $(Ult, \in^*)$* elementar äquivalent, *d.h. für σ Satz gilt $\sigma \leftrightarrow (Ult \models \sigma)$. Sei $c_a : \kappa \to V$ die konstante Funktion: $\forall x < \kappa \ (c_a(x) := a)$. Durch $\forall a \in V \ (j_U(a) := [c_a])$ wird eine* elementare Einbettung *$j_U : V \to Ult$ definiert, d.h. für jede Formel $\varphi(a_1, ..., a_n)$ gilt $\varphi(a_1, ..., a_n) \leftrightarrow [Ult \models \varphi(j_U(a_1), ..., j_U(a_n))]$.*

Beweis. Łoś liefert für σ Satz: $(Ult \models \sigma) \Leftrightarrow \{x < \kappa \mid \sigma\} \in U \Leftrightarrow \{x < \kappa \mid \sigma\} = \kappa \Leftrightarrow \sigma$.
Weiter ergibt sich: $(Ult \models \varphi[j_U(a)]) \Leftrightarrow \{x < \kappa \mid \varphi[c_a(x)]\} \in U \Leftrightarrow \{x < \kappa \mid \varphi[a]\} = \kappa \Leftrightarrow \varphi[a]$. □

Lemma 1.4. *Falls U σ-vollständig, so ist $(Ult, \in^*)$ stark fundiert.*

Beweis. (1) Für $f \in Ult$ gilt stets $\text{ext}(f) = \{[g] : g \in^* f\} \in V$.
Wähle nämlich $g \in^* f$ beliebig und definiere $h : \kappa \to V$ durch:

$$h(x) := \begin{cases} g(x) & \text{für } g(x) \in f(x) \\ f(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $h =^* g$ nach Defintion, also $[h] \in \text{ext}(f)$. Weiter ergibt sich:

$$\begin{aligned} \text{rank } h = \text{rank } \{(x, h(x)) \mid x < \kappa\} &= \sup_{x<\kappa} \{\text{rank } \{\{x\}, \{x, h(x)\}\} + 1\} \\ &\leq \sup_{x<\kappa} \{\text{rank } \{\{x\}, \{x, f(x)\}\} + 1\} = \text{rank } \{(x, f(x)) \mid x < \kappa\} = \text{rank } f \\ &\Rightarrow \exists\, [h] \in \text{ext}(f) \ (\text{rank } h \leq \text{rank } f) \quad (*) \end{aligned}$$

Sei nun rank $f =: \alpha$. Definiere $N := V_{\alpha+1} \cap \{g : \kappa \to V \mid g \in^* f\} \in V$. Sei weiter $F : N \to V$; $g \mapsto [g]$. Wegen $(*)$ ist dann $F : N \to \text{ext}(f)$ surjektiv, also $\text{ext}(f) = F(N)$ und $\text{ext}(f) \in V$ wie gewünscht.

(2) Jede nichtleere Menge $X \subseteq Ult$ besitzt ein $\in^*$-minimales Element, d.h. es existiert keine unendliche Folge:

$$f_0 \ni^* f_1 \ni^* \cdots \ni^* f_k \ni^* \cdots$$

Angenommen doch. Sei dann $\forall n < \omega \ (X_n := \{x < \kappa \mid f_n(x) \in f_{n-1}(x)\})$. Es ist $\forall n < \omega \ (X_n \in U)$ und damit $\bigcap_{n<\omega} X_n \in U$. Wähle ein $x \in \bigcap_{n<\omega} X_n$. Dann gilt:

$$f_0(x) \ni f_1(x) \ni \cdots \ni f_k(x) \ni \cdots$$

Dies ist ein Widerspruch, denn $\{f_n(x) \mid n < \omega\} \in V$ besäße kein $\in$-minimales Element. □

Korollar 1.5. *Das Kollabierungstheorem von Mostowski liefert: Für U σ-vollständig existiert eine transitive Klasse M und ein Isomorphismus $\pi : Ult \to M$ mit $f \in^* g \Leftrightarrow \pi([f]) \in \pi([g])$.*

Wir identifizieren ab jetzt $Ult = M$ und erhalten die elementare Einbettung $j = j_U : V \to M$.

Proposition 1.6. *Es gelten folgende Eigenschaften von $j : V \to M$:*

(1) $j(X \cap Y) = j(X) \cap j(Y)$; $j(\bigcup X) = \bigcup j(X)$; $j(\emptyset) = \emptyset$; $j(\{X\}) = \{j(X)\}$

(2) $\alpha \in \mathrm{Ord} \to j(\alpha) \in \mathrm{Ord}$; $\alpha < \beta \to j(\alpha) < j(\beta)$, *also* $\forall \alpha \in \mathrm{Ord}\ (\alpha \leq j(\alpha))$

(3) $\forall \alpha \in \mathrm{Ord} : \ j(\alpha + 1) = j(\alpha \cup \{\alpha\}) = j(\alpha) \cup j(\{\alpha\}) = j(\alpha) \cup \{j(\alpha)\} = j(\alpha) + 1$

(4) *Sei U κ-vollständig. Für alle $\lambda < \kappa$ gilt dann: $j(\lambda) = \lambda$.*

Beweis. (4) Wir nutzen vollständige Induktion über λ.

Induktionsanfang: $j(\emptyset) = \emptyset$.

Induktionsschritt: Sei $\lambda < \kappa$, sodass für alle $\mu < \lambda$ gilt: $j(\mu) = \mu$. Wir müssen zeigen, dass auch $j(\lambda) = \lambda$ erfüllt ist. Die Ungleichung $\lambda \leq j(\lambda)$ ist klar. Umgekehrt gilt:

$$\begin{aligned}[f] < [j(\lambda)] \to \{x < \kappa \mid f(x) < \lambda\} \in U &\overset{(\star)}{\to} \exists \mu < \lambda \ (\{x < \kappa \mid f(x) = \mu\} \in U) \\ &\to \exists \mu < \lambda \ ([f] = [c_\mu] = \mu) \ \to \ [f] < \lambda\end{aligned}$$

Der letzte Schritt ergibt sich nach Induktionsannahme; $(\star)$ folgt aus:

$$\begin{aligned}\forall \mu < \lambda \ (\{x < \kappa \mid f(x) = \mu\} \notin U) &\to \bigcup_{\mu<\lambda} \{x < \kappa \mid f(x) = \mu\} \notin U \ (\kappa\text{-Vollständigkeit}) \\ &\to \{x < \kappa \mid f(x) < \lambda\} \notin U\end{aligned}$$

□

Korollar 1.7. *M ist ein* inneres Modell *von V, d.h. M ist eine transitive Klasse, welche ZF erfüllt und alle Ordinalzahlen enthält.*

Proposition 1.8. *Die folgenden Formeln sind* absolut*, d.h. $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi^M(x_1, \ldots, x_n)$:*

(1) *$X = \{u, v\}$; $X = \emptyset$; $X \subseteq Y$; X ist transitiv; X ist Ordinalzahl; X ist Limesordinalzahl*

(2) $Z = X \times Y$; $Z = \mathrm{dom}\ X$; $Z = \mathrm{ran}\ X$

(3) *f ist Relation / Funktion; $Y = f(X)$*

Weiter gilt:

(4) $\mathcal{P}^M(X) = \mathcal{P}(X) \cap M$; $V_\alpha^M = V_\alpha \cap M$; $|X|^M \leq |Y|^M \Rightarrow |X| \leq |Y|$

(5) *X ist (Limes-)Kardinalzahl $\Rightarrow$ X ist (Limes-)Kardinalzahl in M*

(6) *$|\alpha| \leq |\alpha|^M$; α ist regulär / schwach unerreichbar $\Rightarrow$ α ist regulär / schwach unerreichbar in M*

2 Innere Modelle und messbare Kardinalzahlen

Definition 2.1. *Eine Kardinalzahl κ heißt* messbar*, falls κ überabzählbar ist und ein κ-vollständiger, nichtprinzipaler Ultrafilter auf κ existiert.*
Für κ messbar heißt $D \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ normales Maß *auf κ, falls D ein κ-vollständiger, nichtprinzipaler Ultrafilter ist, welcher zusätzlich abgeschlossen ist unter Diagonalschnitt:*

$$(\forall i < \kappa \; X_i \in D) \rightarrow \Delta_{i<\kappa} X_i \in D \textit{ mit } \Delta_{i<\kappa} X_i = \{\lambda < \kappa \mid \lambda \in \bigcap_{i<\lambda} X_i\}$$

Satz 2.2. *Jede messbare Kardinalzahl ist stark unerreichbar.*

Beweis.
- „κ messbar $\rightarrow$ κ regulär“: Sei $\kappa = \bigcup_{i<\gamma} X_i$ mit $\gamma < \kappa$ und $\forall i < \gamma \; (X_i < \kappa)$. Dann sind alle X_i Vereinigung von $< \kappa$ Atomen, also $\forall i < \gamma \; (X_i \notin U)$ und $\kappa \notin U$ nach κ-Vollständigkeit, ein Widerspruch.
- „κ messbar $\rightarrow$ κ starker Limes“: Angenommen $\exists \mu < \kappa \; (2^\lambda \geq \kappa)$. Dann existiert $S \subseteq \{f : \lambda \rightarrow \{0;1\}\}$ mit $|S| = \kappa$. Sei U ein κ-vollständiger, nichtprinzipaler Ultrafilter auf κ. Für jedes $\alpha < \kappa$ sei $X_\alpha := \{f \in S \mid f(\alpha) = \epsilon_\alpha\}$ mit $\epsilon_\alpha \in \{0;1\}$, sodass $X_\alpha \in U$. Dann ist $X := \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in U$; jedoch $|X| \leq 1$, denn für $f \in X$, $\alpha < \lambda$ muss gelten: $f(\alpha) = \epsilon_\alpha$.

□

Lemma 2.3. *Ein κ-vollständiger Ultrafilter U auf κ ist genau dann normal, wenn gilt: Jede regressive Funktion auf einem $S \in U$ ist auf einem $T \in U$, $T \subseteq S$ konstant.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei U normal, f regressiv auf einem $S \in U$. Angenommen, für alle $\gamma < \kappa$ ist $\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = \gamma\} \notin U$. Hieraus folgt:

$$\forall \gamma < \kappa \; (C_\gamma := \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) \neq \gamma\}) \in U \Rightarrow \Delta_{\gamma<\kappa} C_\gamma \in U$$

Für $\alpha \in \Delta_{\gamma<\kappa} C_\gamma$ ist jedoch $f(\alpha) \neq \gamma$ für alle $\gamma < \alpha$, im Widerspruch zu f regressiv.

„$\Leftarrow$“: Angenommen, jede regressive Funktion auf einem $S \in U$ ist fast überall konstant, U jedoch nicht normal. Wähle für $i < \kappa$ Mengen $X_i \in U$ mit $\Delta_{i<\kappa} X_i \notin U$. Dann ist $S_0 := \kappa - \Delta_{i<\kappa} X_i \in U$. Für jedes $\alpha \in S_0$ wähle $\xi < \alpha$ mit $\alpha \notin X_\xi$ und setze $f(\alpha) := \xi$ (benutze das Auswahlaxiom). Sei $S \subseteq S_0$ in U mit f konstant auf S. Dann gilt:

$$\exists \gamma < \kappa \; \forall \alpha \in S \; (f(\alpha) = \gamma) \Rightarrow \exists \gamma < \kappa \; \forall \alpha \in S \; (\alpha \notin X_\gamma) \Rightarrow \exists \gamma < \kappa \; S \cap X_\gamma = \emptyset$$

Dies ist ein Widerspruch zu $S \in U$, $X_\gamma \in U$.

□

Satz 2.4. *Sei κ messbar und U ein nichtprinzipaler κ-vollständiger Ultrafilter auf κ mit der elementaren Einbettung $j : V \rightarrow Ult$. Dann gilt $\kappa < j(\kappa)$. Insbesondere ist j nichttrivial.*

Beweis. Sei $d : \kappa \rightarrow \kappa$ die Diagonalfunktion auf κ mit $\forall \alpha < \kappa \; (d(\alpha) = \alpha)$. Dann ist $d(\alpha)$ Ordinalzahl für alle $\alpha < \kappa$, also gilt $[d]$ Ordinalzahl in Ult. Für $\gamma < \kappa$ hat die Teilmenge $(\gamma + 1) \subset \kappa$ als Vereinigung von $< \kappa$ Atomen Maß 0. So ist $d(\alpha) > \gamma$ für fast alle $\alpha < \kappa$, also $[d] > \gamma$. Hieraus folgt $[d] \geq \kappa$. Jedoch ist offenbar $[d] < j(\kappa)$ und zusammen ergibt sich $\kappa < j(\kappa)$. □

Anmerkung 2.5. *Man kann umgekehrt zeigen: Falls eine nichttriviale elementare Einbettung $j : V \rightarrow M$ existiert, so gibt es eine messbare Kardinalzahl; denn für κ minimal bezüglich $j(\kappa) > \kappa$ ist $D := \{X \subseteq \kappa \mid \kappa \in j(X)\}$ ein normales Maß.*
Insbesondere gibt es für κ messbar stets ein normales Maß auf κ.

Lemma 2.6. *Sei D ein nichtprinzipaler κ-vollständiger Ultrafilter auf κ. Sei d die Diagonalfunktion auf κ. Dann sind äquivalent:*

(i) *D ist normal.*

(ii) *In der Ultrapotenz $Ult_D(V)$ ist $\kappa = [d]$.*

(iii) *Für $X \subseteq \kappa$ ist $X \in D$ äquivalent zu $\kappa \in j_D(X)$.*

Beweis. „(i) $\Rightarrow$ (ii)": $[f] \in [d] \Rightarrow f$ ist auf einem $S \in D$ regressiv $\overset{2.3}{\Longrightarrow} \exists T \in U\ \exists \gamma < \kappa\ (\alpha \in T \to f(\alpha) = \gamma) \Rightarrow [f] = j_D(\gamma) = \gamma \Rightarrow [f] \in \kappa$. Umgekehrt gilt: $\gamma < \kappa \Rightarrow \gamma = j_D(\gamma) = [c_\gamma] \in [d]$. Zusammen ergibt sich $\kappa = [d]$.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)": Sei $\kappa = [d]$. Für $X \subseteq \kappa$ gilt dann: $X \in D \Leftrightarrow \{\alpha < \kappa \mid d(\alpha) \in X\} \in D \Leftrightarrow [d] \in j_D(X) \Leftrightarrow \kappa \in j_D(X)$.

„(iii) $\Rightarrow$ (i)": Nach Voraussetzung ist $D = \{X \subseteq \kappa \mid \kappa \in j_D(X)\}$ ein Maß. Lemma 2.3 soll angewendet werden. Betrachte dazu f regressiv auf einem $X \in D$, d.h. $\forall x \in X (f(x) < x)$, woraus sich $\forall x \in j_D(X)\ (j_D f(x) < x)$ ergibt. Wegen $X \in D$ ist $\kappa \in j_D(X)$, also $\gamma := j_D f(\kappa) < \kappa$. Sei nun $A := \{x < \kappa \mid f(x) = \gamma\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} j_D(A) &= \{x < j_D(\kappa) \mid j_D f(x) = j_D(\gamma)\} = \{x < j_D(\kappa) \mid j_D f(x) = \gamma\} \\ &\Rightarrow \kappa \in j_D(A) \Rightarrow A \in D\ . \end{aligned}$$

Damit ist f fast überall konstant. □

Lemma 2.7. *Sei $j : V \to Ult$ eine elementare Einbettung und κ minimal bezüglich $\kappa < j(\kappa)$. Dann ist $\mathcal{P}^M(\kappa) = \mathcal{P}(\kappa)$.*

Beweis.

- $\forall x \in V_\kappa$ (rank $j(x) \leq$ rank x).

  Denn:
  $$\begin{aligned} \text{rank } x = \alpha &\leftrightarrow x \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha \leftrightarrow j(x) \in V^M_{j(\alpha+1)} \setminus V^M_{j(\alpha)} \\ &\leftrightarrow j(x) \in V^M_{\alpha+1} \setminus V^M_\alpha [\text{da } \alpha, \alpha+1 < \kappa] \end{aligned}$$
  Hieraus folgt $j(x) \in V_{\alpha+1}$, also rank $j(x) \leq \alpha$.

- $\forall x \in V_\kappa\ (x = j(x))$.

  Angenommen, $x \in V_\kappa$ mit $j(x) \neq x$ und rank x sei diesbezüglich minimal. Aus $y \in j(x)$ folgt dann rank $y <$ rank $j(x) \leq$ rank x, also $y = j(y) \in j(x)$ und damit $y \in x$. Umgekehrt liefert $y \in x$, dass $y = j(y) \in j(x)$ gelten muss. Zusammen ergibt sich: $x = j(x)$.

- $\forall x \subseteq V_\kappa\ (j(x) \cap V_\kappa = x)$

  „$\supseteq$": Wegen $x \subseteq V_\kappa$ folgt aus $y \in x$, dass $y = j(y) \in j(x)$ gilt, sowie $y \in V_\kappa$.

  „$\subseteq$": $y \in j(x) \cap V_\kappa \to y = j(y) \in j(x) \to y \in x$.

- $V_{\kappa+1} = V^M_{\kappa+1}$.

  Wegen $V^M_{\kappa+1} = V_{\kappa+1} \cap M$ ist zu zeigen: $x \in V_{\kappa+1} \to x \in M$. Für jedes $x \in V_{\kappa+1}$ ist $x \subseteq V_\kappa$, also $x = V_\kappa \cap j(x)$. Wegen $j(x) \in M$ genügt es, zu zeigen: $V_\kappa \in M$. Da κ Limes, ist $V_\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} V_\alpha$. Für $\alpha < \kappa$ ist $V_\alpha \in V_{\alpha+1} \subseteq V_\kappa$, also $j(V_\alpha) = V_\alpha$ und damit $V_\alpha \in M$. Nach den Axiomen Vereinigung und Ersetzung bedeutet das: $V_\kappa \in M$.

Zusammen ergibt sich für jede Teilmenge s von κ: Wegen $s \subseteq V_\kappa$ ist $s \in V_{\kappa+1}$, also $s \in M$. Damit ist $\mathcal{P}^M(\kappa) = \mathcal{P}(\kappa)$. □

Lemma 2.8. *Sei U ein nichtprinzipaler, κ-vollständiger Ultrafilter auf κ, $M = Ult_U(V)$ und j die kanonische elementare Einbettung.*

(i) *$M^\kappa \subseteq M$, d.h. jede Folge $\langle a_i \mid i < \kappa \rangle$ von Elementen aus M ist selbst in M enthalten.*

(ii) *$U \notin M$*

(iii) *$2^\kappa \leq (2^\kappa)^M < j(\kappa) < (2^\kappa)^+$*

(iv) *Ist λ Limes mit $\mathrm{cf}\ \lambda = \kappa$, so gilt $j(\lambda) > \lim_{\alpha<\lambda} j(\alpha)$; für $\mathrm{cf}\ \lambda \neq \kappa$ ist $j(\lambda) = \lim_{\alpha<\lambda} j(\alpha)$.*

(v) *Ist $\lambda > \kappa$ starker Limes mit $\mathrm{cf}\ \lambda \neq \kappa$, so gilt $j(\lambda) = \lambda$.*

Beweis. (i) Sei $\langle a_i \mid i < \kappa \rangle$ solch eine Folge mit $[g_i] := a_i \in M$ für $i < \kappa$. Sei $\kappa = [h]$. Wir konstruieren F mit $[F] = \langle a_i \mid i < \kappa \rangle$. Sei $F(\alpha) := \langle g_i(\alpha) \mid i < h(\alpha) \rangle$ für $\alpha < \kappa$. So ist für $\alpha < \kappa$ stets $F(\alpha)$ eine Funktion mit $\mathrm{dom}\ F(\alpha) = h(\alpha)$, d.h. $[F]$ ist eine Funktion mit $\mathrm{dom}\ [F] = [h]$, also eine κ-Folge. Sei nun $\lambda < \kappa$. Wegen $j(\lambda) = \lambda < \kappa = [h]$ gilt für fast alle $\alpha < \kappa$: $\lambda < h(\alpha)$. Für fast alle $\alpha < \kappa$ ist damit $(F(\alpha))(c_\lambda(\alpha)) = (F(\alpha))(\lambda) = g_\lambda(\alpha)$, d.h. $[F](\lambda) = [F]([c_\lambda]) = [g_\lambda]$; das λ-te Glied von $[F]$ ist genau a_λ, wie gewünscht.

(ii) Angenommen, $U \in M$. Mit Hilfe von (i) rechnet man nach, dass $\kappa^\kappa \in M$. Für jedes $f \in \kappa^\kappa$ ist $[f] = \{g \in \kappa^\kappa \mid \{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in U \ \wedge\ \forall h\, (\{\alpha < \kappa \mid f(\alpha) = h(\alpha)\} \in U \to \mathrm{rank}\ h \geq \mathrm{rank}\ g)\} \in M$ nach Aussonderung. Somit:

$$\forall f \in \kappa^\kappa\ ((f, [f]) \in M) \Rightarrow F := \bigcup_{f \in \kappa^\kappa} \{(f, [f])\} \in M$$

Wegen $\mathrm{im}\ F = \{[f] \mid f \in \kappa^\kappa\} = j(\kappa)$ ist $F : \kappa^\kappa \to j(\kappa)$ eine surjektive Funktion in M. So ist $|\kappa^\kappa|^M \geq |j(\kappa)|^M$. Wir zeigen nun, dass $j(\kappa)$ starker Limes ist in M; dies liefert den gewünschten Widerspruch. Da κ messbar, ist κ starker Limes:

$$\forall \lambda < \kappa\ (2^\lambda < \kappa) \Rightarrow \forall \lambda < j(\kappa)\ (2^\lambda < j(\kappa))^M$$

So ist $j(\kappa)$ starker Limes in M.

(iii) $2^\kappa = |\mathcal{P}(\kappa)| = |\mathcal{P}^M(\kappa)| \leq |\mathcal{P}^M(\kappa)|^M = (2^\kappa)^M$. (Es wurde Lemma 2.7 angewendet.) Weiter gilt $(2^\kappa)^M < j(\kappa)$, da $\kappa < j(\kappa)$ und $j(\kappa)$ unerreichbar in M. Schließlich ist $j(\kappa) < (2^\kappa)^+$ wegen $|j(\kappa)| \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa$.

(iv) Sei λ Limes mit $\mathrm{cf}\ \lambda = \kappa$, $\lambda = \lim_{\alpha<\kappa} \lambda_\alpha$. Die Ungleichung $j(\lambda) \geq \lim_{\alpha<\kappa}\ j(\lambda_\alpha)$ ist klar, denn $\forall \alpha < \kappa\ (j(\lambda) > j(\lambda_\alpha))$. Für die andere Richtung betrachte $f : \kappa \to V$ mit $f(\alpha) = \lambda_\alpha$ für alle $\alpha < \kappa$. Für jedes $\beta < \kappa$ ist $f(\alpha) > \lambda_\beta$ für fast alle $\alpha < \kappa$, also $[f] > j(\lambda_\beta)$. Jedoch ist $[f] < j(\lambda)$. Aus $j(\lambda) = \lim_{\alpha<\kappa}\ j(\lambda_\alpha)$ würde nun folgen:

$$[f] < \lim_{\alpha<\kappa}\ j(\lambda_\alpha) \Rightarrow \exists\ \beta < \kappa\ ([f] < j(\lambda_\beta))$$

Dies ist ein Widerspruch.

Sei jetzt $\gamma = \mathrm{cf}\ \lambda \neq \kappa$, $\lambda = \lim_{\alpha<\gamma} \lambda_\alpha$. Wieder ist die Ungleichung $j(\lambda) \geq \lim_{\alpha<\gamma}\ j(\lambda_\alpha)$ klar.

1. Fall: $\gamma = \mathrm{cf}\ \lambda > \kappa$.
Sei $[f] < j(\lambda)$, d.h. $f : \kappa \to \lambda$. Dann ist $\mathrm{im}\ f$ in λ beschränkt. Das heißt:

$$\exists \nu < \lambda\ (f(x) < \nu \text{ für alle } x < \kappa) \Rightarrow [f] < j(\nu)$$

Wähle $\beta < \gamma$ mit $\nu \in \lambda_\beta$. Dann ist $[f] < j(\lambda_\beta)$ und es folgt $j(\lambda) \leq \lim_{\alpha<\gamma} j(\lambda_\alpha)$.

2. Fall: $\gamma = \operatorname{cf} \lambda < \kappa$.
Sei $[f] < j(\lambda)$. Zu zeigen: $[f] < j(\lambda_\beta)$ für ein $\beta < \gamma$. Aus $j(\lambda_\beta) \leq [f]$ für alle $\beta < \gamma$ würde folgen:

$$\forall \beta < \gamma \ ((X_\beta := \{\alpha < \kappa \mid \lambda_\beta \leq f(\alpha)\}) \in U) \Rightarrow \bigcap_{\beta<\gamma} X_\beta \in U$$

Dabei ist $\bigcap_{\beta<\gamma} X_\beta = \{\alpha < \kappa \mid \lambda_\beta \leq f(\alpha) \text{ für alle } \beta < \gamma\} = \{\alpha < \kappa \mid \lambda \leq f(\alpha)\}$. Hieraus ergibt sich $j(\lambda) \leq [f]$, ein Widerspruch.

(v) Für alle $\alpha < \lambda$ gilt: $|j(\alpha)| \leq \alpha^\kappa < \lambda$ (da λ starker Limes) $\Rightarrow j(\lambda) = \lim_{\alpha<\lambda} j(\alpha) \leq \lambda \Rightarrow j(\lambda) = \lambda$.

□

3 Messbare Kardinalzahlen und Kardinalzahlarithmetik

Lemma 3.1. *Sei κ messbar. Falls $2^\kappa > \kappa^+$, so hat $\{\alpha < \kappa \mid 2^\alpha > \alpha^+\}$ Maß 1 für jedes normale Maß auf κ. Insbesondere gilt: Ist $2^\alpha = \alpha^+$ für alle $\alpha < \kappa$, so folgt $2^\kappa = \kappa^+$.*

Beweis. Sei D ein normales Maß auf κ [verwende 2.5], $M = Ult_D(V)$. Sei $\{\alpha < \kappa \mid 2^\alpha = \alpha^+\} \in U$. Nach Lemma 2.6 folgt hieraus $\kappa \in j(\{\alpha < \kappa \mid \alpha^+ = 2^\alpha\}) = \{\alpha < j(\kappa) \mid (\alpha^+)^M = (2^\alpha)^M\}$. Somit

$$M \models (2^\kappa = \kappa^+)$$

Wegen $\mathcal{P}^M(\kappa) = \mathcal{P}(\kappa)$ gilt: $\kappa^+ \leq 2^\kappa \leq (2^\kappa)^M = (\kappa^+)^M$. Umgekehrt ist $(\kappa^+)^M \leq \kappa^+$ gesichert, da κ^+ in M ebenfalls Kardinalzahl ist und offenbar größer als κ. Zusammen heißt das: $(\kappa^+)^M = \kappa^+$. Wegen $(2^\kappa = \kappa^+)^M$ muss damit auch $2^\kappa = \kappa^+$ gelten. □

Lemma 3.2. *Sei κ messbar, D ein normales Maß auf κ und $j : V \to M$ die elementare Einbettung. Ist $\lambda > \kappa$ starker Limes mit $\operatorname{cf} \lambda = \kappa$, so gilt $2^\lambda < j(\lambda)$.*

Beweis. Wir wollen zeigen:

$$2^\lambda \overset{(1)}{=} \lambda^\kappa \overset{(2)}{=} (\lambda^\kappa)^M \leq (\lambda^{j(\kappa)})^M \overset{(3)}{<} j(\lambda)$$

(1) $2^\lambda = \lambda^{\operatorname{cf} \lambda}$, da λ starker Limes.

(2) Nach Lemma 2.8 (i) ist jede Funktion $f : \kappa \to \lambda$ in M enthalten.

(3) Es gilt $\lambda < j(\lambda)$ nach Lemma 2.8 (iv): Wegen $\operatorname{cf} \lambda = \kappa$ ist $j(\lambda) > \lim_{\alpha<\lambda} j(\alpha) \geq \lim_{\alpha<\lambda} \alpha = \lambda$. Aus $M \models (j(\lambda) \text{ starker Limes})$ und $j(\kappa) < j(\lambda)$ folgt so die Ungleichung.

□