Mathematisches Institut der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 08/09
17. 12. 08
Blatt 9

Übungen zur Mengenlehre

33. Zeigen Sie $\Pi_{n<\omega}\aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$, $\Pi_{\alpha<\omega+\omega}\aleph_\alpha = \aleph_{\omega+\omega}^{\aleph_0}$ und $\Pi_{\alpha<\omega_1+\omega}\aleph_\alpha = \aleph_{\omega_1+\omega}^{\aleph_1}$.

34. (a) Zeigen Sie $\aleph_\alpha^{\aleph_1} = \aleph_\alpha^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_1}$ für alle $\alpha < \omega_1$, und $\aleph_\alpha^{\aleph_2} = \aleph_\alpha^{\aleph_1} \cdot 2^{\aleph_2}$ für alle $\alpha < \omega_2$.

(b) Sei $[\mu]^\kappa$ die Menge aller Teilmengen von μ der Kardinalität κ. Eine Teilmenge $C \subseteq [\mu]^\kappa$ heißt konfinal in $[\mu]^\kappa$, wenn für alle $x \in [\mu]^\kappa$ ein $y \in C$ mit $x \subseteq y$ existiert. Zeigen Sie für alle unendlichen Kardinalzahlen $\kappa \leq \mu$:

Ist C konfinal in $[\mu]^\kappa$, so ist $card([\mu]^\kappa) = card(C) \cdot 2^\kappa$.

35. (a) Ist κ eine reguläre Limeskardinalzahl, so gilt $\kappa^{<\kappa} = 2^{<\kappa}$. Ist κ regulär und eine starke Limeskardinalzahl, dann ist $\kappa^{<\kappa} = 2^{<\kappa} = \kappa$.

(b) Ist $\kappa > \omega$ eine singuläre Kardinalzahl aber kein starker Limes, so ist $\kappa^{<\kappa} = 2^{<\kappa} > \kappa$. Ist dagegen κ eine singuläre, starke Limeskardinalzahl, dann ist $2^{<\kappa} = \kappa$ und $\kappa^{<\kappa} = \kappa^{cf\ \kappa}$.

36. Zeigen Sie $rank(x) = sup\{rank(z) + 1 \mid z \in x\}$ für alle Mengen x.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 07. 01. 09 in der Vorlesungspause

Frohe Weihnachten und ein gutes neues Jahr!