Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 08/09
26. 11. 08
Blatt 7

Übungen zur Mengenlehre

25. Sei ω_1 regulär. Sei Σ_1^0 die Menge aller offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ und Π_1^0 die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{R}$. Definiere durch transfinite Rekursion Σ_α^0 als die Menge aller abzählbaren Vereinigungen von Mengen in $\bigcup\{\Pi_\beta^0 \mid \beta < \alpha\}$ und Π_α^0 als die Menge aller abzählbaren Durchschnitte von Mengen in $\bigcup\{\Sigma_\beta^0 \mid \beta < \alpha\}$.
Zeigen Sie, dass $\bigcup\{\Sigma_\beta^0 \mid \beta < \omega_1\}$ die Borel-σ-Algebra ist.

Für $A \subseteq \mathbb{R}$ bezeichne A^* die Menge derjenigen $x \in A$, so dass $A \cap U$ überabzählbar ist für alle offenen $x \in U \subseteq \mathbb{R}$.

26. Zeigen Sie: Ist P perfekt, so gilt $P^* = P$.

27. Sei $F \subseteq \mathbb{R}$ überabzählbar und abgeschlossen. Sei $F = P \cup S$ die im Beweis des Satzes von Cantor-Bendixon konstruierte Zerlegung von F in eine perfekte Menge P und ein abzählbares S. Zeigen Sie, dass dann $P = F^*$ und $S = F - F^*$ gilt.

28. Zeigen Sie mit dem Baireschen Kategorientheorem, dass $\mathbb{Q}$ nicht der Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen ist.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 08. 12. 08 in der Vorlesungspause