Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 08/09
28. 01. 09
Blatt 13

# Übungen zur Mengenlehre

49. Sei $n \in \omega$, $\kappa = \beth_n^+$ und $F : [\kappa]^{n+1} \to \omega$. Für $a \in \kappa$ sei $F_a : [\kappa - \{\alpha\}]^n \to \omega$ definiert durch $F_a(x) = F(x \cup \{a\})$. Zeigen Sie: Es gibt eine Menge $A \subseteq \kappa$ der Größe $\beth_n$, so dass für alle $C \subseteq A$ mit $|C| < \beth_{n+1}$ und $u \in \kappa - C$ ein $v \in A - C$ existiert, so dass $F_v$ und $F_u$ auf $[C]^n$ übereinstimmen.

50. In der Vorlesung wurde $(2^{\aleph_0})^+ \to (\aleph_1)^2_{\aleph_0}$ gezeigt. Zeigen Sie durch Induktion über $n \in \omega$

$$\beth_n^+ \to (\aleph_1)^{n+1}_{\aleph_0}$$

für alle $n \in \omega$.

Hinweis: Im Beweis von $(2^{\aleph_0})^+ \to (\aleph_1)^2_{\aleph_0}$ wurde im letzten Schritt das Schubfachprinzip verwendet. Verwenden Sie stattdessen nun die Induktionsvoraussetzung.

51. Sei $T$ ein Baum der Höhe $\omega$ und jede Stufe von $T$ endlich. Zeigen Sie, dass es dann in $T$ einen unendlichen Zweig gibt.

52. Sei $\kappa$ regulär und $T$ ein Baum der Höhe $\kappa$. Sei $\lambda < \kappa$, so dass alle Stufen des Baumes Größe $< \lambda$ haben. Zeigen Sie, dass $T$ dann einen Zweig der Größe $\kappa$ hat.

Hinweis: Sei $\lambda$ o.B.d.A. regulär. Sei $T_\delta = \{t \in T \mid o(t) = \delta\}$. Für jedes $\delta < \kappa$ mit $cf(\delta) = \lambda$ wähle ein $t_\delta \in T_\delta$ beliebig und ein $s_\delta <_T t_\delta$, so dass $\{s \mid s_\delta <_T s\} \cap T_\delta = \{t_\delta\}$ gilt. Den gesuchten Zweig finden Sie nun mit Hilfe des Satzes von Fodor.