Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 08/09
07. 01. 09
Blatt 10

Übungen zur Mengenlehre

37. Es gelte ZF ohne das Fundierungsaxiom. Zeigen Sie, dass dann aus $V = \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha \in Ord\}$ das Fundierungsaxiom folgt.

Sei $(A, \leq)$ eine partiell geordnete Menge und $B \subseteq A$. B heißt konfinal in A, wenn es zu jedem $x \in A$ ein $y \in B$ gibt mit $x \leq y$.

38. Zeigen Sie: Ist $(A, \leq)$ eine lineare Ordnung, dann existiert ein in A konfinales $B \subseteq A$, so dass B durch $\leq$ wohlgeordnet wird und $otp(B) \leq card(A)$ gilt.

39. Seien A eine Menge und κ_i für $i \in A$ Kardinalzahlen. Sei

$$\Pi_{i \in A} \kappa_i := \{f : A \to V \mid f(i) \in \kappa_i \text{ für alle } i \in A\}.$$

Definiere eine Ordnung auf $\Pi_{i \in A} \kappa_i$ durch

$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad f(i) \leq g(i) \text{ für alle } i \in A.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\Pi_{i \in A} \kappa_i, \leq)$ eine partielle aber im Allgemeinen keine lineare Ordnung ist.
(b) Zeigen Sie, dass es in $\Pi_{i \in \omega} \omega$ keine konfinale Menge B der Mächtigkeit ω gibt.

40. Sei $\Pi_{i \in A} \kappa_i$ wie in Aufgabe 39 und U ein Ultrafilter auf A. Definiere nun eine Ordnung auf $\Pi_{i \in A} \kappa_i$ durch

$$f \leq g \quad \Leftrightarrow \quad \{i \in A \mid f(i) \leq g(i)\} \in U.$$

Zeigen Sie, dass dann $(\Pi_{i \in A} \kappa_i, \leq)$ eine lineare Ordnung ist.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 14. 01. 09 in der Vorlesungspause