Übungen zur Mengenlehre

Ist T ein Baum, so bezeichne $T_\delta = \{s \in T \mid ht_T(s) = \delta\}$ die δ-te Stufe von T.

Aufgabe 51

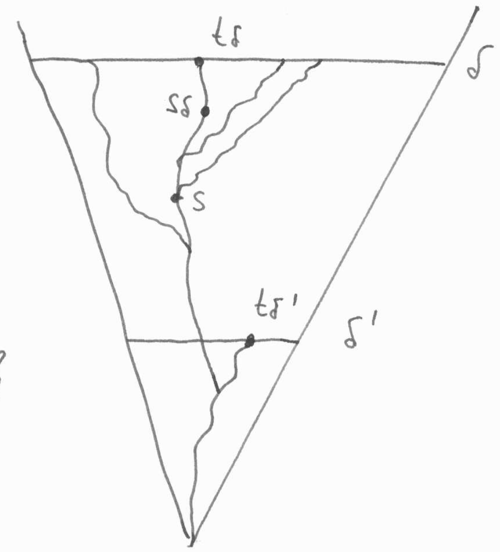
Wähle rekursiv $t_n \in T_n$, so dass $t_n <_T t_{n+1}$ und t_n immer unendlich viele Nachfolger hat. Diese Rekursion bricht nicht ab. Denn hat man t_n schon gewählt, so hat es nur endlich viele Nachfolger auf der nächsten Stufe. Da es selbst aber unendlich viele Nachfolger hat, muß also mindestens einer von den Nachfolgern auf der nächsten Stufe selbst unendlich viele Nachfolger haben.

Offensichtlich ist $\{t_n \mid n \in \omega\}$ ein unendlicher Zweig.

Aufgabe 52

Sei λ o.B.d.A. regulär. Für jedes $\delta < \kappa$ mit $cf(\delta) = \lambda$ wähle $t_\delta \in T_\delta$ beliebig. Nun wähle für jedes $\delta < \kappa$ mit $cf(\delta) = \lambda$ ein $s_\delta <_T t_\delta$, so dass

$\{s \mid s_\delta <_T s\} \cap T_\delta = \{t_\delta\}$.



Ein solches existiert, weil sonst wäre $|T_\delta| \geq \lambda$. Nach dem Lemma von Fodor ex. eine stationäre Menge $A \subseteq \{\delta < \kappa \mid cf(\delta) = \lambda\}$ und $\gamma < \kappa$, so dass $ht_T(s_\delta) = \gamma$ für alle $\delta \in A$. Da $|T_\gamma| < \lambda < \kappa$ ist, gibt es also ein $s \in T_\gamma$, so dass $s_\delta = s$ für κ-viele $\delta \in \kappa$ gilt. Aufgrund der Wahl von s_δ gilt für zwei solche $\delta' < \delta$ $\quad t_{\delta'} <_T t_\delta$. Also ~~definieren~~ bilden die zugehörigen t_δ einen Zweig der Größe κ.

$\square$