

Übungen zur Mathematischen Logik

25. Sei $(\mathbb{R}^*, <^*, +^*, \cdot^*, f^*)$ der in der Vorlesung definierte Erweiterungskörper von $(\mathbb{R}, <, +, \cdot, f)$ mit infinitesimalen Elementen. Zeigen Sie, dass \mathbb{R} kein Supremum in \mathbb{R}^* besitzt. D.h. \mathbb{R}^* ist nicht ordnungsvollständig.

26. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $[a, b]^* = \{x \in \mathbb{R}^* \mid a \leq x \leq b\}$. Zeigen Sie:

(a) f ist stetig auf $[a, b]$

\Leftrightarrow Für alle $x \in [a, b]$ und $y \in [a, b]^*$ mit $y \approx x$ gilt $f^*(y) \approx f(x)$.

(b) f ist gleichmäßig stetig auf $[a, b]$

\Leftrightarrow Für alle $x, y \in [a, b]^*$ mit $y \approx x$ gilt $f^*(y) \approx f^*(x)$.

27. (a) Verwenden Sie die Nonstandard-Charakterisierungen aus Aufgabe 26, um zu zeigen: Ist f stetig auf dem Intervall $[a, b]$, so ist es auch gleichmäßig stetig auf $[a, b]$.

(b) Warum funktioniert Ihr Beweis nicht für offene Intervalle $]a, b[$?

28. Sei $K := \{\frac{p}{q} \mid p, q \text{ Polynome über } \mathbb{R}, q \neq 0\}$ der Körper der rationalen Funktionen über \mathbb{R} . Für $f, g \in K$ setze man $f \leq g$, wenn ein x_0 existiert, so daß $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \geq x_0$ gilt. Zeigen Sie:

(a) K ist ein angeordneter Erweiterungskörper von \mathbb{R} , der unendliche und von Null verschiedene infinitesimale Elemente enthält. Dabei identifiziere man $r \in \mathbb{R}$ mit der konstanten Funktion r .

(b) Zeigen Sie, dass die angeordneten Körper K und \mathbb{R} nicht dieselben Sätze erfüllen.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 09. 06. 08 in der Vorlesung