$0^\sharp$ und elementare Einbettungen von L in sich selbst

Theorem (Kunen): Es sind äquivalent:
1. $0^\sharp$ existiert.
2. Es existiert eine elementare Einbettung $j : L \to L$.

Der Beweis von 1.⇒2. ist der einfachere. Da $0^\sharp$ existiert, existiert auch die Klasse der *Silver indiscernibles* I. Wähle eine nichttriviale, ordnungserhaltende Injektion auf diesen und erweitere diese zu einer elementaren Einbettung von L in sich selbst.

Zum Beweis von 2.⇒1.:
Zunächst einmal beweisen wir durch eine Ultrapotenzkonstruktion folgendes Lemma:
Lemma 1: Wenn eine nichttriviale elementare Einbettung $j : L \to L$ mit kritischem Punkt γ existiert, so auch $\tilde{j} : L \to L$ mit den Eigenschaften:
1. $\tilde{j}$ ist elementar.
2. $\tilde{j}$ ist nichttrivial, ihr kritischem Punkt ist ebenfalls γ.
3. Alle $\kappa \in Card$ mit $\mathrm{cof}(\kappa) > \gamma$ sind $\tilde{j}$-invariant.
Wir können also o.B.d.A. annehmen, dass j Eigenschaft 3. besitzt.

Definiere nun Klassen $U_\alpha \subseteq Card$ rekursiv:

$$U_0 := \{\kappa \in Card \mid \mathrm{cof}(\kappa) > \gamma\}$$

$$U_{\alpha+1} := \{\kappa \in U_\alpha \mid \overline{\overline{U_\alpha \cap \kappa}} = \kappa\}$$

$$\text{für } \lambda \in Lim : U_\lambda := \bigcap\{U_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$$

Lemma 2: Alle U_α sind nichtleere echte Klassen.

Wähle weiter $\kappa \in U_{\omega_1}$. Definiere für $\alpha < \kappa$ $M_\alpha := L_\kappa\{\gamma \cup (U_\alpha \cap \kappa)\}$ (ein Submodell von L_κ), elementare Einbettungen $i_\alpha := \pi_\alpha^{-1} : L_\kappa \to L_\kappa$ sowie $\gamma_\alpha := i_\alpha(\gamma)$. Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass wir dadurch $\aleph_1$ Indiscernibles, eben die γ_α, für $(L_\kappa, \in)$ erhalten. Damit wäre die Existenz von $0^\sharp$ gezeigt.

Lemma 3: γ_α ist die kleinste Ordinalzahl $> \gamma$ in M_α.

Lemma 4: $\alpha < \beta$, $x \in M_\beta \Rightarrow i_\alpha(x) = x$, d.h. M_β ist i_α-invariant.

Lemma 5: $\alpha < \beta \Rightarrow \gamma_\alpha < \gamma_\beta$, d.h. die Folge der γ_α ist streng monoton steigend.

Der nächste Schritt besteht für $\alpha < \beta < \kappa$ in der Definition von Submodellen $N_\beta^\alpha := L_\kappa\{\gamma_\alpha \cup (U_\beta \cap \kappa)\}$ sowie von elementaren Einbettungen $h_\beta^\alpha := (\pi_\beta^\alpha)^{-1} : L_\kappa \to L_\kappa$. Diese besitzen folgende Eigenschaften:

Lemma 6: $\xi < \alpha \vee \xi > \beta \Rightarrow h_\beta^\alpha(\gamma_\xi) = \gamma_\xi$.

Lemma 7: $h_\beta^\alpha(\gamma_\alpha) = \gamma_\beta$.

Dies erlaubt uns nun, durch Anwenden der h_β^α auf beliebige Terme der Gestalt $\varphi\,[\gamma_{\alpha_1} \ldots \gamma_{\alpha_n}]$ die Parameter beliebig (unter Ordnungserhaltung) zu manipulieren, wodurch gezeigt wird, dass die γ_α Indiscernibles für $(L_\kappa, \in)$ sind.

$\square$

Satz 2: Wenn (in V) eine messbare Kardinalzahl existiert, dann existiert auch $0^\sharp$.