Measurable Cardinals

Ausarbeitung zum Vortrag vom 5.11.2007 im Graduate Seminar on Set Theory (S4A4).
Behandelter Stoff: Def. 10.3, Lemma 10.4 und S. 285 - 288 im Jech

Definition 0.1. Eine überabzählbare Kardinalzahl κ ist *messbar* wenn es einen κ-vollständigen Ultrafilter U auf κ gibt der kein Hauptfilter ist. (auch: nichtprinzipialer Ultrafilter)

Bemerkung. Ist U ein κ-vollständigen nichtprinzipialer Ultrafilter U auf κ, dann hat jede Menge $X \in U$ Kardinalität κ: Angenommen $card(X) < \kappa$ dann gibt es $\gamma < \kappa$ mit $X = \{x_i \mid i < \gamma\}$. Da U ein Ultrafilter ist, ist $\bar{X} \notin U$ und $\bar{X} = \bigcap_{i<\gamma} \kappa - \{x_i\}$. U ist außerdem κ-vollständig, folglich gibt es $i < \gamma$ mit $\kappa - \{x_i\} \notin U$, also $\{x_i\} \in U$. Damit ist U aber ein prinzipialer Ultrafilter. $\lightning$

Lemma 0.2. *Jede messbare Kardinalzahl ist unerreichbar.*

Beweis. Sei κ eine messbare Kardinalzahl. Wir zeigen zunächst das κ regulär ist. Angenommen κ ist nicht regulär, dann können wir κ schreiben als $\kappa = \bigcup_{i<\gamma} x_i$ und $x_i < \kappa$ für alle $i < \gamma$. Aus obiger Bemerkung folgt, dass $\kappa - x_i \in U$ für alle $i < \gamma$. Weiterhin ist $\emptyset = \bar{\kappa} = \bigcap_{i<\gamma} \kappa - x_i \in U$, da U κ vollständig ist. $\lightning$

Nehmen wir nun an, dass κ erreichbar ist. Sei also $\lambda < \kappa$ mit $2^\lambda \geq \kappa$. Sei S eine Menge von Funktionen $f : \lambda \to \{0, 1\}$ mit $card(S) = \kappa$, U ein κ-vollständiger Ultrafilter auf S. Da U ein Ultrafilter ist, ist für jedes $\alpha < \gamma$ entweder $\{f \in S \mid f(\alpha) = 0\}$ oder $\{f \in S \mid f(\alpha) = 1\}$ in U. Sei X_α diejenige Menge, die in U liegt und ε_α gleich 0 oder 1, entsprechend zu X_α.
Da U κ-vollständig ist folgt dass die Menge $X = \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ in U liegt. X enthält aber nur ein einziges Element, die Funktion f mit $f(\alpha) = \varepsilon_\alpha$. $\lightning$ $\square$

Im folgenden werden wir eine Ultrapotenz des Universums konstruieren und mit dieser arbeiten. Sei U ein Ultrafilter auf einer Menge S. Wir betrachten die Klasse aller Funktionen von S ins Universum. Wie im letzten Vortrag definieren wir

$$f =^* g \text{ genau dann, wenn } \{x \in S : f(x) = g(x)\} \in U$$
$$f \in^* g \text{ genau dann, wenn } \{x \in S : f(x) \in g(x)\} \in U$$

Weiterhin sei die Äquivalenzklasse $[f]$ von f via $=^*$ definiert als

$$[f] = \{g : f =^* g \text{ und } \forall h\ (h =^* f \to \text{rank } g \leq \text{rank } h)\}$$

$[f]$ ist eine Menge, da für alle α V_α eine Menge ist.
Zuletzt sei $[f] \in^* [g]$ wenn $f \in^* g$. Dies ist wohldefiniert, wie im letzten Vortrag gezeigt wurde.
Sei $Ult = Ult_U(V)$ die Klasse aller $[f]$, f eine Funktion von S. Wir werden das Modell $(Ult, \in^*)$ näher betrachten. Łoś's Theorem gilt auch in diesem Fall. Ist $\varphi(x_1, ..., x_n)$ eine Formel dann

$$Ult \models \varphi([f_1], ..., [f_2]) \text{ genau dann, wenn } \{x \in S : \varphi(f_1(x), ..., f_2(x))\} \in U$$

Ist σ ein Satz, dann gilt $Ult \models \sigma$ genau dann, wenn σ in V gilt. Ult und V sind *elementar äquivalent*. Für jede Menge a ist die konstante Funktion c_a definiert und die Funktion $j_U : V \to Ult$, definiert über $j_U(a) = [c_a]$ ist eine elementare Einbettung von V in Ult.

$$\varphi(a_1, ..., a_n) \text{ genau dann, wenn } Ult \models \varphi(j(a_1), ...j(a_n))$$

für alle Formeln $\varphi(x_1, ..., x_n)$ der Mengenlehre.
Wir wollen uns im Folgenden auf die stark fundierten Ultrapotenzen konzentrieren.

Definition 0.3. Das Modell $Ult_U(V)$ ist stark fundiert wenn:

i. Jede nicht leere Menge $X \subset Ult$ ein $\in^*$ minimales Element hat.

ii. $ext(f) = \{[g] : g \in^* f\}$ für alle f eine Menge ist.

Die zweite Bedingung gilt für jeden Ultrafilter U, da für jedes $g \in^* f$ ein $h =^* g$ existiert so dass rank $h \leq$ rank f. z.B. $h(x) = g(x)\ \forall x \in S$ mit $g(x) \in f(x)$ und $h(x) = 0$ sonst. Die Aussage folgt dann aus dem Ersetzungsaxiom.
Die erste Bedingung ist äquivalent dazu, dass es keine unendlich absteigende $\in^*$ Folge

$$f_0 \ni^* f_1 \ni^* ... \ni^* f_k \ni^* ...(k \in \omega)$$

von Elementen der Ultrapotenz gibt.

Lemma 0.4. *Sei U ein σ-vollständiger Ultrafilter. Dann ist $(Ult, \in^*)$ ein stark fundiertes Modell.*

Beweis. Angenommen es gibt eine unendlich absteigende $\in^*$ Folge: $f_0, f_1, ..., f_n, ...$
Für jedes n ist

$$X_n = \{x \in S : f_{n+1}(x) \in f_n(x)\}$$

ein Element des Ultrafilters. Da U σ-abgeschlossen ist, ist der Durchschnitt $X = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$ ebenfalls in U und folglich nicht leer. Sei $x \in X$. Für dieses x ist

$$f_0(x) \ni f_1(x) \ni ... \ni f_n(x) \ni ...$$

eine unendlich absteigende $\ni$-Folge in V. $\lightning$ □

Mit dem Mostowski Kollaps können wir jedes stark fundierte Modell isomorph auf ein transitives Modell abbilden. Ist also U σ-vollständig, dann gibt es eine bijektive Abbildung π von Ult in eine transitive Klasse M mit $f \in^* g$ genau dann, wenn $\pi([f]) \in \pi([g])$.
Für jeden σ-vollständigen Ultrafilter U erhalten wir also ein inneres Modell $M = \pi(Ult_U(V))$ und eine elementare Einbettung $j : V \to M$.
Ist α eine Ordinalzahl, dann ist $j(\alpha)$ ebenfalls eine Ordinalzahl, da j elementar ist. Außerdem gilt $j(\alpha + 1) = j(\alpha) + 1$, $j(0) = 0$ und $j(n) = n$ für alle natürlichen Zahlen n.
Des weiteren folgt aus $\alpha < \beta \ :\ j(\alpha) < j(\beta)$. Folglich ist $\alpha \leq j(\alpha)$ für alle Ordinalzahlen: Angenommen die Aussage gilt für alle $\beta < \alpha$ und $\alpha > j(\alpha)$. Dann ist $j(\alpha) = \beta < \alpha$. Aber es gilt nach Induktionsvoraussetzung $\beta \leq j(\beta)$ und somit $j(\alpha) = \beta \leq j(\beta) < j(\alpha)$. $\lightning$

Lemma 0.5. *Die Einbettung erhält auch ω.*

Beweis. Angenommen $j(\omega) > \omega$. Dann gibt es $[f] \in^* [c_\omega]$ mit $\pi([f]) \geq \omega$. Sei also $[f] \in^* [c_\omega]$. Dann ist $\{x \in S \mid f(x) < \omega\} \in U$ und $\bigcap_{n<\omega}\{x \in S \mid f(x) \neq n\} = \{x \in$

$S \mid f(x) \geq \omega\} \notin U$. Folglich gibt es ein $n < \omega$ mit $\{x \in S \mid f(x) = n\} \in U$ und $f =^* c_n$. Wir wissen aber, dass $\pi([c_n]) = n$. ↯ □

Ist U λ-abgeschlossen können wir mit demselben Argument $j(\gamma) = \gamma$ für alle $\gamma < \lambda$ schließen.

Lemma 0.6. *Ist κ eine messbare Kardinalzahl und U ein nichtprinzipialer κ-vollständiger Ultrafilter auf κ dann gilt $j(\kappa) > \kappa$. für die oben definierte Einbettung.*

Beweis. Sei d die Diagonal Funktion auf κ mit

$$d(\alpha) = \alpha \; (\alpha < \kappa)$$

Da U κ-vollständig ist, hat jede beschränkte Teilmenge von κ das Maß 0. Folglich gilt für alle $\gamma < \kappa$ dass $d(\alpha) > \gamma$ für fast alle α. Somit ist $\pi([d]) > \pi([c_\gamma]) = \gamma$ für alle $\gamma < \kappa$ und wir können $\pi([d]) \geq \kappa$ schließen. Außerdem gilt $[d] \in^* [c_\kappa]$ und somit auch $j(\kappa) > \kappa$. □

Wir haben hiermit gezeigt, dass aus der Existenz einer messbare Kardinalzahl die Existenz einer elementare Einbettung j des Universums in ein transitives Modell M folgt, so dass j nicht die Identität ist. j ist eine *nichttriviale elementare Einbettung des Universums.*

Theorem 0.7 (Scott). *Wenn es eine messbare Kardinalzahl gibt, dann ist $V \neq L$*

Beweis. Angenommen $V = L$ und es gibt messbare Kardinalzahlen. Sei κ die kleinste messbare Kardinalzahl, U ein nichtprinzipialer κ-vollständiger Ultrafilter auf κ und $j : V \to M$ die entsprechende elementare Einbettung. Wie wir oben gezeigt haben ist $j(\kappa) > \kappa$.
Da $V = L$, ist das einzige transitive Modell das alle Ordinalzahlen enthält, das Universum. Folglich $V = M = L$. Da j eine elementare Einbettung und κ die kleinste messbare Kardinalzahl ist erhalten wir

$$M \models j(\kappa) \text{ ist die kleinste messbare Kardinalzahl}$$

und $j(\kappa)$ ist die kleinste messbare Kardinalzahl. Dies ist ein Widerspruch da $j(\kappa) > \kappa$. □

Wir haben gezeigt, dass aus der Existenz einer messbaren Kardinalzahl die Existenz einer nicht trivialen elementaren Einbettung des Universums folgt. Die Umkehrung, nämlich das aus einer nicht trivialen elementaren Einbettung $j : V \to M$ die Existenz einer messbaren Kardinalzahl folgt, gilt ebenso.

Lemma 0.8. *Sei j eine nicht triviale elementare Einbettung des Universums, dann existiert eine messbare Kardinalzahl*

Beweis. Sei $j : V \to M$ eine nicht triviale Einbettung. Es gibt eine Ordinalzahl α mit $j(\alpha) \neq \alpha$. Ansonsten wäre rank $(j(x)) =$ rank (x) für alle x und via Induktion über rank folgt $j(x) = x$ für alle x, da $j(x) = \{y \mid y \in j(x)\}$ und rank $(y) <$ rank (x). Somit

$$j(x) = \{y \mid y \in j(x)\} = \{j(y) \mid j(y) \in j(x)\} = \{j(y) \mid y \in x\} = \{y \mid y \in x\} = x$$

Wir bezeichnen mit κ die kleinste Ordinalzahl mit $j(\kappa) \neq \kappa$. Es ist $j(n) = n$ für alle natürlichen Zahlen n und $j(\omega) = \omega$ da $0, n+1$ und ω absolute Formeln sind und j elementar ist. Also ist $\kappa > \omega$.

Angenommen κ ist keine Kardinalzahl. Dann gibt es $\lambda < \kappa$ und eine surjektive Abbildung $g : \lambda \to \kappa$. Da j elementar ist, ist $j(f)$ eine surjektive Abbildung von $j(\lambda) = \lambda$ in $j(\kappa)$. Für ein $\alpha < \lambda$ sei $\beta = f(\alpha)$. Dann ist $j(f)(\alpha) = j(\beta) = \beta$ da $\beta < \kappa$. Folglich ist das Bild von $j(f)$ ebenfalls κ und wir erhalten $j(\kappa) = \kappa$. $\lightning$.

Wir werden zeigen, dass κ eine messbare Kardinalzahl ist.

Sei D die Klasse aller Teilmengen von κ die wie folgt definiert ist:

$$X \in D \text{ genau dann, wenn } \kappa \in j(X) \ (X \subset \kappa)$$

Da $\kappa < j(\kappa)$ ist $\kappa \in D$. Weiterhin ist $\emptyset \notin D$, da $j(\emptyset) = \emptyset$. Da $j(X \cap Y) = j(X) \cap j(Y)$ und $j(X) \subset j(Y)$, wenn $X \subset Y$, ist D ein Filter. [Ist $\kappa \in j(X)$ und $\kappa \in j(Y)$ dann ist $\kappa \in j(X \cap Y)$; ist $X \subset Y$ und $\kappa \in j(X)$, dann ist $\kappa \in j(Y)$]. D ist sogar ein Ultrafilter, da $j(\kappa - X) = j(\kappa) - j(X)$.

Es bleibt zu zeigen, dass D nichtprinzipial und κ-vollständig ist:

Für jedes $\alpha < \kappa$ ist $j(\{\alpha\}) = \{j(\alpha)\} = \{\alpha\}$. Somit $\kappa \notin j(\{\alpha\})$ und $\{\alpha\} \notin D$. Angenommen D wäre ein Hauptfilter. Dann gibt es $X_0 \in D$, so dass X_0 D erzeugt. Sei α die kleinste Ordinalzahl in X_0. Es ist $X_0 = \{\alpha\} \cup X_0 - \{\alpha\}$ und somit $j(X_0) = j(\{\alpha\}) \cup j(X_0 - \{\alpha\})$. Da $\kappa \in j(X_0)$ und $\kappa \notin j(\{\alpha\})$ muss $\kappa \in j(X_0 - \{\alpha\})$. Folglich ist $X_0 - \{\alpha\} \in D$ und $X_0 - \{\alpha\} \subset X_0$, im Widerspruch zur Wahl von X_0.

Sei $\gamma < \kappa$ und sei $\langle X_\alpha : \alpha < \gamma \rangle$ eine Sequenz von Teilmengen von κ mit $\kappa \in j(X_\alpha)$ für alle $\alpha < \gamma$. Wir werden zeigen, dass $\bigcap_{\alpha < \gamma} X_\alpha \in D$. In M ist $j(\langle X_\alpha : \alpha < \gamma \rangle)$ eine Sequenz der Länge $j(\gamma)$ von Teilmengen von $j(\kappa)$. Für jedes $\alpha < \kappa$ ist der $j(\alpha)$-fachste Term von $j(\langle X_\alpha : \alpha < \gamma \rangle)$ gleich $j(X_\alpha)$. Da $j(\alpha) = \alpha$ für alle $\alpha < \gamma$ und $j(\gamma) = \gamma$ folgt $j(\langle X_\alpha : \alpha < \gamma \rangle) = \langle j(X_\alpha) : \alpha < \gamma \rangle$. Hieraus folgt, dass für $X = \bigcap_{\alpha < \gamma} X_\alpha$ gilt $j(X) = \bigcap_{\alpha < \gamma} j(X_\alpha)$ und somit $\kappa \in j(X)$ woraus wiederum $X \in D$ folgt. $\square$

Lemma 0.9. *Sei $j : V \to M$ eine nicht triviale, elementare Einbettung, κ die kleinste Ordinalzahl mit $\kappa < j(\kappa)$ und D der in 0.8 definierte Ultrafilter auf κ. Sei außerdem $j_D : V \to Ult$ die kanonische Einbettung von V in die Ultrapotenz $Ult_D(V)$. Dann gibt es eine elementare Einbettung k von Ult in M, so dass $k(j_D(a)) = j(a)$ für alle a:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "j_D"'] & M \\ Ult \arrow[ur, "k"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Für jedes $[f] \in Ult$ definieren wir

$$k([f]) = j(f)(\kappa)$$

$j(f)$ ist eine Funktion auf $j(\kappa)$, da f eine Funktion auf κ ist. Sei nun $f =_D g$. Dann ist $X = \{\alpha \mid f(\alpha) = g(\alpha)\} \in D$ und nach Definition von D ist

$$\kappa \in j(X) = \{\alpha < j(\kappa) \mid j(f)(\alpha) = j(g)(\alpha)\}$$

und folglich ist $j(f)(\kappa) = j(g)(\kappa)$ und k wohldefiniert.

Sei $\varphi(x)$ eine Formel und $Ult \models \varphi([f])$. Die Menge $X = \{\alpha \mid \varphi(f(\alpha))\}$ ist in D und folglich liegt κ in der Menge

$$j(X) = \{\alpha < j(\kappa) \mid M \models \varphi(j(f)(\alpha))\}$$

und da $j(f)(\kappa) = k([f])$ folgt $M \models \varphi(k([f]))$.

Zuletzt zeigen wir noch, dass $k(j_D(a)) = j(a)$ für alle a gilt. Es ist $k(j_D(a)) = k([c_a]) = j([c_a])(\kappa) = j(a)$, da $j([c_a])$ die konstante Funktion auf $j(\kappa)$ mit Wert $j(a)$ ist. $\square$