Seminar zur Mengenlehre

Forcing und Symmetrische Modelle

Gregor Weckbecker

4. Juni 2007

1 Symmetrische Modelle

Im folgenden sei M ein Grundmodell und $(P, <_P, 1_P)$ p.o. set.

Lemma 1.1 (Symmetrie Lemma)**.** *Sei π ein Automorphismus auf P. Dann gibt es ein $\tilde{\pi} : M^P \to M^P$ mit:*

1. $\tilde{\pi} : M^P \leftrightarrow M^P$
2. $(\forall \dot{x} \in M^P)\ \mathrm{rg}(\dot{x}) = \mathrm{rg}(\tilde{\pi}(\dot{x}))$
3. $(\forall G \subseteq P$ *M-generisch*$)$ $\pi[G]$ *M-generisch*
4. $(\forall \dot{x} \in M^P)\ \tilde{\pi}(\dot{x})^{\pi[G]} = \dot{x}^G$
5. $M[G] = M[\pi[G]]$
6. *Für alle alle $\in$-Formeln $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ und $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in M^P$ gilt:*

$$(\forall p \in P)\ p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\ \leftrightarrow\ \pi(p) \Vdash \varphi(\tilde{\pi}\dot{x}_0, \ldots, \tilde{\pi}\dot{x}_{n-1})$$

Sei im folgenden $\mathcal{G}$ eine Gruppe von Automorphismen auf $(P, <_p, 1_p)$.

Definition 1.2. Sei $\dot{x} \in M^P$. Dann ist:

$$\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{x}) = \{\pi \in \mathcal{G} \mid \pi(\dot{x}) = \dot{x}\}$$

Bemerkung 1.3. Sei π ein Automorphismus auf $(P, <_P, 1_P)$ und $\dot{x} \in M^P$, dann gilt:

$$\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\pi\dot{x}) = \pi \cdot \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(\dot{x}) \cdot \pi^{-1}$$

Definition 1.4. Sei $\mathcal{G}$ eine Gruppe. Dann heißt eine Menge $\mathcal{F}$ von Untergruppen von $\mathcal{G}$ *Filter* gdw. Für alle $H, K \in \mathcal{F}$ gilt:

$$\mathcal{G} \in \mathcal{F} \tag{1.4.1}$$
$$H \in \mathcal{F} \wedge H \subset K \to K \in \mathcal{F} \tag{1.4.2}$$
$$H \in \mathcal{F} \wedge K \in \mathcal{F} \to H \cap K \in \mathcal{F} \tag{1.4.3}$$
$$\pi \in \mathcal{G} \wedge H \in \mathcal{F} \to \pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F} \tag{1.4.4}$$

Definition 1.5. Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf $\mathcal{G}$. Sei $\dot{x} \in M^P$. $\dot{x}$ heißt *symmetrisch* gdw. $sym_{\mathcal{G}}(\dot{x}) \in \mathcal{F}$.

Die Klasse HS der *erblich symmetrischen Namen* (hereditarily symmetric names) ist durch Induktion über den Rang von $\dot{x}$ definiert:

$$\mathrm{dom}(\dot{x}) \subset \mathrm{HS} \wedge \dot{x} \text{ ist symmetrisch } \rightarrow \dot{x} \in \mathrm{HS}$$

Bemerkung 1.6.

1. $(\forall x \in M)\check{x} \in \mathrm{HS}$
2. Sei $\dot{x} \in M^P$ ein symmetrischer Name und sei $\pi \in \mathcal{G}$, dann ist $\pi(\dot{x})$ symmetrisch. Damit ist $\pi(\dot{x}) \in \mathrm{HS}$ gdw. $\dot{x} \in \mathrm{HS}$ und $\pi \in \mathcal{G}$ gilt.

Definition 1.7 (Symmetrisches Submodel)**.** Sei M ein Grundmodel, $(P, <_P, 1_P) \in M$ ein p.o. set, $\mathcal{G}$ eine Gruppe von Automorphismen von $(P, <_P, 1_P)$ und $\mathcal{F}$ ein Filter auf $\mathcal{G}$. Weiter sei G ein M-generischer Filter. Dann ist ein *symmetrisches Submodel* N_G von $M[G]$ durch:

$$N_G = \{\dot{x}^G | \dot{x} \in \mathrm{HS}\}$$

definiert.

Lemma 1.8. $M \subseteq N_G \subseteq M[G]$

Lemma 1.9. *Es gilt* $\mathrm{Trans}(N_G)$.

2 Forcing

Definition 2.1. Für eine $\in$-Formel $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ und $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in \mathrm{HS}$ gilt:

$$p \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \text{ gdw. } (\forall G \subseteq P\ M\text{- generisch})\, p \in G \rightarrow N_G \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$$

Nun kann man wie für $\Vdash$ verfahren. Die meisten Eigenschaften übetragen sich auf diesen Fall (und werden im Folgenden auch verwendet). Lediglich im "Quantorenfall" bedarf es einer Anpassung:

Lemma 2.2. *Sei* $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ *eine* $\in$*-Formel. Weiter seien* $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in \mathrm{HS}$*, dann gilt:*

$$p \Vdash_{\mathrm{HS}} \forall v_0 \varphi(v_0, x\dot{x}_1 \ldots, \dot{x}_{n-1}) \text{ gdw. } (\forall \dot{x}_0 \in \mathrm{HS}) p \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1 \ldots, \dot{x}_{n-1})$$

Damit ist die Menge:

$$\{(p, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1}) \mid p \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})\}$$

für alle $\in$-Formeln $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ in M definierbar.

Lemma 2.3. *Sei* $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ *eine* $\in$*-Formel. Weiter seien* $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in \mathrm{HS}$ *und es gebe ein* G M*-generisch mit:* $N_G \models \forall v_o\, \varphi(v_0, \dot{x}_1^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G)$*, dann gibt es ein* $p \in G$ *mit* $p \Vdash_{\mathrm{HS}} \forall v_o\, \varphi(v_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_{n-1})$.

Damit lässt sich ein symmetrisches Forcingtheorem beweisen:

Satz 2.4 (Symmetrisches Forcing Theorem)**.** *Für* G *generisch,* $\varphi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ *ein* $\in$*-Formel und* $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1} \in \mathrm{HS}$ *gilt:*

$$N_G \models \varphi(\dot{x}_0^G, \ldots, \dot{x}_{n-1}^G) \text{ gdw. } (\exists p \in G) p \Vdash_{\mathrm{HS}} \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{n-1})$$

Bemerkung 2.5. Da für alle Automorphismen π von $(P, <_P, 1_P)$ $\pi(\mathrm{HS}) = \mathrm{HS}$ gilt, überträgt sich das symmetrie Lemma 1.1 auf N_G und $\Vdash_{\mathrm{HS}}$.

3 ZF in N_G

Satz 3.1. $(N_G, \in)$ *ist ein transitives Model von* ZF.

Bemerkung 3.2. Im Allgemeinen gilt in N nicht das Auswahl-Axiom und es gilt nicht $G \in N_G$.