Permutationsmodelle

von Gero Mayr-Gollwitzer
im Rahmen des Forcing-Seminars im SS 2007 an der Universität Bonn

In diesem Vortrag beschäftigen wir uns mit einer anderen Theorie der Mengenlehre, genannt ZFA - Mengenlehre mit Atomen. Wie der Name schon sagt, gibt es in dieser Theorie zusätzliche Elemente, Atome genannt, die selber keine weiteren Elemente besitzen und in diesem Sinne atomar genannt werden können.
Ziel wird es dann sein, Modelle dieser Theorie zu konstruieren, in denen das Auswahlaxiom verletzt ist. Die wesentliche Idee dabei ist, dass es - im Gegensatz zu ZF - nichttriviale Automorphismen des Universums gibt, die z.B. durch Permutationen der Atome induziert werden. Letzlich wird die Existenz solcher Automorphismen Modelle von ZFA + $\neg$ AC liefern.
Im nächsten Vortrag wird dann mit Forcing-Methoden die Situation auf die ZF-Situation übertragen und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms von ZF zeigen.

Wir wollen die Theorie ZFA nun genauer aufbauen. Die Sprache von ZFA besteht nicht nur aus dem Element-Symbol, sondern enthält auch ein Konstantensymbol A, mit dem die Menge der Atome bezeichnet werden soll. Die Axiome von ZFA stimmen nun im Wesentlichen mit den ZF-Axiomen überein, nur dass man die Sonderrolle der Atome berücksichtigen muss. Bei der Formulierung der Axiome sollen die üblichen Abkürzungen für Klassenterme benutzt werden.

Die Axiome lauten wie in ZF, nur dass die Formeln ϕ in den Schemata Formeln der ZFA-Sprache sind, und bis auf diese Änderungen :

(Atom) $\forall x \in A \; \forall y \; y \notin x$
(Ext_A) $\forall x \notin A \; \forall y \notin A \; (\forall z \; (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$

Wir wollen nun erst einmal die Konsistenz dieser Axiome mit ZF zeigen, indem wir konkret ein Modell von ZFA konstruieren. Uns soll es aber für die spätere Anwendung direkt um das spezielle Modell HS der erblich symmetrischen Mengen gehen. Zunächst wollen wir aber direkt mit einer an die Von-Neumann-Hierarchie erinnernden Konstruktion ein erstes Modell von ZFA bauen :

Dazu nehmen wir uns in einem Modell von ZF (o.b.d.A. im Weiteren V) eine Menge A von Elementen gleichen Rangs $A \subseteq V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$ und eine Menge $E \in (V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha) \setminus A$. Ersteres werden die Atome, letzteres die leere Menge in unserem Modell werden. Setze nun (per Induktion [in V!]):

$$\begin{aligned} W_0 &= A \cup \{E\} \\ W_{\alpha+1} &= \mathfrak{P}(W_\alpha) \setminus \{\emptyset\} \\ W_\lambda &= \bigcup_{\alpha<\lambda} W_\alpha \\ W &= \bigcup_{\alpha \in On} W_\alpha \end{aligned}$$

Wie schon erwähnt werden Permutationen eine herausragende Rolle spielen. Deshalb nun einige Bemerkungen hierzu :
Sei $G = S(A) = \{\pi | \pi : A \leftrightarrow A\}$ die symmetrische Gruppe über A. Nun lässt sich jedes $\pi \in G$ per Rekursion zu einem $\in -$Automorphismus $\bar{\pi}$ von W erweitern. Das Außergewöhnliche ist nun, dass wir i.A. nichttriviale Automorphismen des (ZFA-)Universums erhalten, was für ZF nicht möglich ist! Für jedes $x \in W$ definiere nun $G_x = \{\bar{\pi} \in G | \pi(x) = x\}$, die Isotropiegruppe von x. Wie man leicht sieht, bildet sie eine Untergruppe von G.

Wir kommen nun zu den wesentlichen Definitionen des Vortrags :

Definition 1:
Sei G eine Gruppe. Eine Menge $\mathfrak{F}$ von Untergruppen von G heißt *Filter* auf G, wenn für alle Untergruppen H, K von G gilt:

(i) $G \in \mathfrak{F}$

(ii) Für $H \in \mathfrak{F}$, $H \subseteq K$ ist $K \in \mathfrak{F}$

(iii) Für $H, K \in \mathfrak{F}$ ist $H \cap K \in \mathfrak{F}$

(iv) Ist $g \in G$ und $H \in \mathfrak{F}$, so ist $gHg^{-1} \in \mathfrak{F}$

Ist $G_x \in \mathfrak{F}$, so heißt x *symmetrisch.*
Ist jedes Atom symmetrisch, so setze

$$U = \{x | \text{ jedes } z \in TC(\{x\}) \text{ ist symmetrisch}\}$$

Beachte, dass hierbei der ZFA-Transitive Abschluss gemeint ist, den man genau wie für ZF definiert. U heißt ein *Permutationsmodell* und die Elemente von HS heißen *erblich symmetrisch.*

Wir wollen uns nun auf den Fall beschränken, in dem $G = S(A)$ ist und $\mathfrak{F}$ der von den Untergruppen $\text{fix}(F) = \{\pi \in G | \pi(x) = x$ für alle $x \in F)$ mit $F \subseteq A$ endlich erzeugte Filter. Wir erhalten dann folgende Bedingungen :

Definition 2:
Sei $x \in W$.
(i) Die Menge x heißt *symmetrisch*, falls es ein endliches $A_0 \subseteq A$ gibt mit $\{\pi \in G | \pi|_{A_0} = \mathrm{id}_{A_0}\} \subseteq G_x$. Ein solches A_0 nennen wir einen *Träger* von x.
(ii) $S = \{x \in W | x \text{ ist symmetrisch}\}$ heißt die Klasse der symmetrischen Mengen.
(iii) Eine Menge x heißt *erblich symmetrisch*, falls $TC(\{x\}) \cap W \subseteq S$, falls also jedes Element des transitiven Abschlusses von $\{x\}$ schon symmetrisch ist.
(iv) $HS = \{x | x \text{ ist erblich symmetrisch}\}$ ist die Klasse der erblich symmetrischen Mengen und $(HS, \in, A)$ das (Fraenkelsche) *Permutationsmodell*.

Um von bestimmten Mengen zeigen zu können, dass sie erblich symmetrisch sind, ist folgendes Lemma äußerst nützlich :

Lemma 1:
Ist $x \subseteq HS$ und $x \in S$, so $x \in HS$. Mit anderen Worten : Ist eine Teilmenge von HS symmetrisch, so ist sie schon erblich symmetrisch.
Beweis:
Beruht auf:

$$TC(x) = x \cup \bigcup_{u \in x} TC(u)$$

Mit denselben Methoden wie beim Beweis dieses Lemmas sieht man die W-Transitivität von HS ein, d.h. $\forall x, y \in W \ x \in y \in HS \rightarrow x \in HS$.

Lemma 2:
Die wie oben gewonnenen $\bar{\pi}$ schränken sich zu (modelltheoretischen) Automorphismen von $(HS, \in, A)$ ein, m.a.W.: $\pi|_{HS} : HS \rightarrow HS$ ist bijektiv und es gilt $x \in y \leftrightarrow \bar{\pi}(x) \in \bar{\pi}(y)$ sowie $\bar{\pi}(A) = A$.
Beweis:
Wähle $\in$-minimales X mit $\bar{\pi}(x) \notin HS$, führe dies mit Definition von $\bar{\pi}$ zu einem Widerspruch. Die Bijektivität folgt daraus, dass $\overline{\pi^{-1}}$ Umkehrabbildung ist.

Lemma 3:
Sei ϕ eine $\in -A$-Formel, $y_0, \ldots, y_n \in HS$, $\pi \in G$. Sei

$$t = \{x \in HS \mid (HS, \in, A) \models \phi(x, y_0, \cdots, y_n)\}$$

Ist $t \in V \setminus \{\emptyset\}$, so ist $t \in W \setminus W_0 \cap HS$ und

$$\bar{\pi}(t) = \{x \in HS \mid (HS, \in, A) \models \phi(x, \bar{\pi}(y_0), \ldots, \bar{\pi}(y_n))\}$$

Beweis:
Berechne einfach $\bar{\pi}(t)$, wobei die Automorphismen-Eigenschaft von $\bar{\pi}$ wesentlich eingeht. Die Vereinigung der Träger der y_i ist dann Träger für t.

Nun gilt es das folgende Theorem zu beweisen :

Theorem
Es gilt $(HS, \in, A) \models$ ZFA.
Beweis: Einige Axiome sieht man leicht durch nachrechnen. Für solche Axiome, die die Existenz gewisser Mengen fordern, bildet man (in V) die Menge y_0 aller Elemente x, so dass $HS \models$ (x hat die gewünschte Eigenschaft). Ist sie leer, so liefert E das Gewünschte, ansonsten y_0. (Inf) zeigt man durch Einbettung von V in HS mittels $e(\emptyset) = \emptyset$, $e(x) = \{e(y) \mid y \in x\}$.

Wir haben jetzt gesehen, dass das Permutationsmodell für jegliche Wahl der Atome (solange sie den gleichen Rang haben) ein Modell von ZFA liefert. Was uns jedoch eigentlich interessiert, ist ein Modell von ZFA + $\neg AC$. Dazu müssen wir die zusätzliche Annahme machen, dass A **unendlich** ist. Dann verletzt HS auf vielfältige Weise das Auswahlaxiom, z.B. hat die Menge der zweielementigen Teilmengen von A keine Auswahlfunktion und A ist unendlich, hat aber keine abzählbare Teilmenge. Diese Phänomene beruhen im Wesentlichen auf der Existenz einer nichttrivialen Permutation des Universums. Wir zeigen die erste hier genannte Verletzung des Auswahlsaxioms :

Satz:
Ist A unendlich, so hat $z = \{u \subseteq A \mid \mathrm{card}(u) = 2\}$ keine Auswahlfunktion. Insbesondsere gilt $(HS, \in, A) \models \neg AC$.
Beweis:
Man zeigt leicht (mit Lemma 1) $z \in HS$.
Nun zur Verletzung des Auswahlaxioms :
Offenbar ist z in HS eine Menge nichtleerer Mengen. Angenommen es gäbe eine Auswahlfunktion $f \in HS$ für z. Wir wählen einen Träger A_0 von f. Da A nun **unendlich** ist, können wir $a \neq b \in A \setminus A_0$ wählen, sowie ein $\pi \in G$, das a und b vertauscht und sonst alle Atome festlässt. Insbesondere ist dann $\bar{\pi}(\{a, b\}) = \{a, b\}$. Nun gilt aber, da $\bar{\pi}$ Automorphismus ist :

$$(HS, \in, A) \models (a = f(\{a, b\})) \leftrightarrow (HS, \in, A) \models (\bar{\pi}(f)(\bar{\pi}(\{a, b\}))) \leftrightarrow (HS, \in, A) \models (b = f(\{a, b\}))$$

Demnach wäre aber $a = b$ in HS, entgegen unserer Voraussetzung, was die Existenz einer Auswahlfunktion widerlegt.