

Klassen Forcing

Daniel Kühlwein

16. Mai 2007

1 Klassen Forcing

Entgegen dem Titel werden wir in diesem Vortrag nicht generelles Klassen-Forcing, sondern nur folgenden Spezialfall behandeln:

Theorem 1.1 (*Easton*) Sei M ein abzählbar transitives Modell von $ZFC+GCH$. Weiter sei F eine über M definierbare Funktion mit $\text{dom}(f) \subseteq M$ von den regulären Kardinalzahlen in die Menge der Kardinalzahlen mit folgenden Eigenschaften: $\forall$ regulären κ, λ :

1. $F(\kappa) > \kappa$
2. $F(\kappa) \leq F(\lambda) \forall \kappa \leq \lambda$
3. $\text{cf} F(\kappa) > \kappa$

Dann gibt es eine generische Erweiterung $M[G]$ von M in der gilt: M und $M[G]$ haben dieselben Kardinalzahlen und Konfinalitäten und für alle regulären κ gilt:

$$M[G] \models 2^\kappa = F(\kappa)$$

Im letzten Vortrag wurde dieser Satz für den Fall, dass F nur auf einer Menge definiert ist gezeigt. Ist $\text{range}(F) = \text{reguläre Kardinalzahlen}$ kann uns normales Forcing, d.h. forcen mit einer Menge $P \in M$ nicht das gewünschte Ergebnis liefern. Dies folgt direkt aus Katrins Vortrag. Somit müssen wir mit einer echten Klasse forcen.

Beweis: Zunächst wollen wir einige allgemeine Aussagen über das Forcen mit einer Klasse treffen. Sei also $P \subset M$ eine in M definierbare Klasse und eine Forcing Halbordnung.

Wir nennen $G \subset P$ *generisch* über M wenn gilt:

- i $p \leq q$ und $p \in G$ impliziert $q \in G$
- ii $p, q \in G$ impliziert $\exists r \in G r \leq p \wedge r \leq q$
- iii Ist D eine Klasse in M und dicht in P , gilt $D \cap G \neq \emptyset$

Ist M abzählbar existiert solch ein G , da es nur abzählbar viele Klassen in M gibt.

Wir definieren $M[G] = \{\dot{x}^G \mid \dot{x} \in M\}$, analog zum normalen Forcing, wobei $\dot{x}^G = \{\dot{y}^G \mid \exists p \in G (\dot{y}, p) \in \dot{x}\}$.

Für $M[G]$ gilt:

1. $M[G]$ ist transitiv.
2. Wir definieren rekursiv für alle $x \in M$: $\check{x} = \{(\check{y}, 1_P) \mid y \in x\}$ dann gilt $\check{x}^G = x \in M[G]$.
3. $M \subseteq M[G]$

2 Forcing Theorem für $M[G]$:

1. $M[G] \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ genau dann, wenn $\exists p \in G \ p \Vdash \varphi(x_1, \dots, x_n)$
2. $Forc_\varphi = \{(p, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \in M \mid p \Vdash \varphi(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)\}$ ist in M definierbar.

3 ZFC in $M[G]$

Wir wollen nun zeigen, dass $M[G]$ ein Modell von ZFC ist.

$M[G]$ ist transitiv und folglich gelten $(Ex)^{M[G]}$, $(Ext)^{M[G]}$ und $(Fund)^{M[G]}$. $(Inf)^{M[G]}$ folgt, da $\omega^M \in M \subseteq M[G]$.

Für $(Paar)^{M[G]}$ genügt es z.z. dass für alle $a, b \in M[G]$ gilt $\{a, b\} \in M[G]$. Seien $a, b \in M[G]$, $\dot{a}, \dot{b} \in M$ mit $\dot{a}^G = a, \dot{b}^G = b$. Setze $\dot{c} = \{(\dot{a}, 1), (\dot{b}, 1)\}$ Dann ist $\dot{c}^G = \{\dot{a}^G, \dot{b}^G\} = \{a, b\} \in M[G]$.

Bisher haben wir alle Aussagen für ein beliebiges P und G gezeigt. Die restlichen Axiome folgen jedoch nicht ohne weiteres.

Sei also P die Klasse aller Funktionen p mit Werten in $\{0, 1\}$ deren Definitionsbereich aus Tripeln (κ, α, β) wobei κ eine reguläre Kardinalzahl sei, $\alpha < \kappa$, $\beta < F(\kappa)$ und für jede reguläre Kardinalzahl γ gelte:

$$|\{(\kappa, \alpha, \beta) \in \text{dom}(p) : \kappa \leq \gamma\}| < \gamma$$

Weiterhin sei $p < q$ genau dann wenn $q \subset p$.

Für jede reguläre Kardinalzahl λ definieren wir wie im letzten Vortrag $p^{\leq \lambda}$, $p^{> \lambda}$, $P^{\leq \lambda}$ und $P^{> \lambda}$:

$$P^{\leq \lambda} = \{p^{\leq \lambda} : p \in P\}, \quad P^{> \lambda} = \{p^{> \lambda} : p \in P\}$$

und

$$p^{\leq \lambda} = p \restriction \{(\kappa, \alpha, \beta) : \kappa \leq \lambda\}, \quad p^{> \lambda} = p \restriction \{(\kappa, \alpha, \beta) : \kappa > \lambda\}$$

Mit den bisherigen Definitionen gilt: für jede reguläre Kardinalzahl λ ist $P = P^{> \lambda} \times P^{\leq \lambda}$, $P^{> \lambda}$ ist λ -abgeschlossen, $P^{\leq \lambda}$ ist eine Menge und erfüllt die λ^+ -chain condition.

Sei nun G ein M -generischer Filter über P . Für jede reguläre Kardinalzahl λ sei $G_\lambda = G \cap P^{\leq \lambda}$ generisch über $P^{\leq \lambda}$ und $G_{> \lambda} = G \cap P^{> \lambda}$.

Lemma 3.1 *Es gilt $G = G_\lambda \times G_{> \lambda}$, G_λ ist generisch über $P^{\leq \lambda}$ und $G_{> \lambda}$ ist generisch über $P^{> \lambda}$.*

Lemma 3.2 *Es gilt $P = \bigcup P^{\leq \lambda}$*

Lemma 3.3 Für alle $x \in M[G]$ gibt es ein reguläres λ_x mit $x \in M[G_{\lambda_x}]$. Insbesondere ist $M[G] = \bigcup_{\lambda \text{ regulär}} M[G_\lambda]$

Lemma 3.4 Jede Funktion $f : \lambda \rightarrow M$ in $M[G_{>\lambda} \times G_\lambda]$ ist in $M[G^{\leq \lambda}]$

Nach diesen Vorüberlegungen können wir die restlichen Axiome zeigen.

(Vereinigung)^{M[G]} Es genügt z.z. $\forall x \in M[G]$ ist $\bigcup x \in M[G]$. Sei $x \in M[G]$. Dann gibt es λ mit $x \in M[G_\lambda]$. In $M[G_\lambda]$ gilt jedoch ZFC. Insbesondere ist $\bigcup x \in M[G_\lambda]$ und somit, nach Lemma 3.3, ist $\bigcup x \in M[G]$.

(Auswahlaxiom)^{M[G]} Wir zeigen, dass jede Menge zu einer Ordinalzahl bijektiv ist. Sei $x \in M[G]$. Dann existiert λ mit $x \in M[G_\lambda]$. Da in $M[G_\lambda]$ ZFC gilt finden wir ein f , dass x bij. auf eine Ordinalzahl α in $M[G_\lambda]$ abbildet. Dann ist $f \in M[G]$ und α bleibt eine Ordinalzahl in $M[G]$.

(Ersetzung)^{M[G]} Wir benutzen eine leicht abgeänderte Version von Lemma 3.4. In $M[G]$ definiere $\varphi(\alpha, v)$ eine Funktion $K : Ord \rightarrow M[G]$. Es reicht z.z. dass für alle regulären Kardinalzahlen $\{K(\alpha) | \alpha < \lambda\}$ eine Menge in $M[G]$ ist. Sei λ eine reguläre Kardinalzahl. Wie in Lemma 3.4 definieren wir für jedes $\alpha < \lambda$ eine Klasse $D_\alpha \subset P^{>\lambda}$:
 $p \in D_\alpha$ genau dann, wenn es eine maximale Antikette $W \subset P^{\leq \lambda}$ und eine Familie $\{\dot{a}_{p,q}^{(\alpha)} | q \in W\}$ gibt, so dass für alle $q \in W$ gilt: $(p, q) \Vdash \varphi(\alpha, \dot{a}_{p,q}^{(\alpha)})$

Wie in Lemma 3.4 können wir zeigen, dass alle D_α offen dicht sind und, da $P^{>\lambda}$ λ -abgeschlossen ist, $\bigcap_{\alpha < \lambda} D_\alpha$ dicht ist. Daher gibt es ein $p \in G_{>\lambda} \cap P^{>\lambda}$ so dass $p \in D_\alpha$ für alle $\alpha < \lambda$. In M wählen wir nun für jedes $\alpha < \lambda$ eine maximale Antikette $W_\alpha \subset P^{\leq \lambda}$ so dass $(p, q) \Vdash \varphi(\alpha, \dot{a}_{p,q}^{(\alpha)})$ für alle $q \in W_\alpha$. Sei nun $S = \{\dot{a}_{p,q}^{(\alpha)} | \alpha < \lambda, q \in W_\alpha\}$. Dann ist $\{K(\alpha) | \alpha < \lambda\} \subset \{\dot{a}^G | \dot{a} \in S\}$. $\{\dot{a}^G | \dot{a} \in S\}$ ist aber eine Menge in $M[G]$. Somit gibt es ein γ so dass $\{\dot{a}^G | \dot{a} \in S\} \in M[G_\gamma]$ und insbesondere $\dot{a}^G = \dot{a}^{G_\gamma}$ für alle $\dot{a} \in S$. Da OBdA $\lambda \leq \gamma$ können wir in $M[G_\gamma]$ auf G_λ zugreifen. In $M[G_\gamma]$ gilt das *Aussonderungsaxiom* und folglich ist $\{\dot{a}^{G_\gamma} | \dot{a} = \dot{a}_{p,q}^{(\alpha)} \in S, \alpha < \lambda, q \in W_\alpha \cap G_\lambda\} = \{K(\alpha) | \alpha < \lambda\} \in M[G_\gamma] \subset M[G]$.

(Aussonderung)^{M[G]} Wie bereits in Mengenlehre I gezeigt wurde impliziert das Ersetzungsschema das Aussonderungsschema.

(Potenzmenge)^{M[G]} : Sei $a \in M[G]$, $\dot{a} \in M$ mit $\dot{a}^G = a$. Sei λ so gewählt, dass $a \in M[G_\lambda]$. Sei $s = \{\dot{y} | \dot{y} \subseteq \text{dom}(\dot{a}) \times P^{\leq \lambda}\}$ und $t = \{(\dot{y}, 1_P) | \dot{y} \in s\}$. Dann ist $P(a) \cap M[G] \subseteq t^G$.

Somit ist $M[G]$ ein Modell von ZFC. Wir können wie im letzten Vortrag zeigen, dass $M[G]$ und M dieselben Kardinalzahlen und Kofinalitäten haben, und dass $2^\kappa = F(\kappa)$ für alle regulären Kardinalzahlen κ in $M[G]$ gilt.