Der Satz von Easton

Nachdem die Konsistenz von $2^\kappa = \lambda$ für beliebige reguläre κ sowie beliebige λ mit $\mathrm{cof}(\lambda) > \kappa$ bewiesen wurde, wollen wir die Beweiskonstruktion verallgemeinern, um die gleichzeitige Konsistenz beliebig vieler solcher Aussagen zu zeigen. Dazu beweisen wir den folgenden Satz:

Satz 3.0 (Easton):

Sei M Grundmodell von ZFC+GCH, $E : \{\kappa \in \mathrm{Card} \mid \kappa \text{ regulär}\} \longrightarrow \mathrm{Card}$ „Easton-Indexfunktion", d.h. E hat folgende Eigenschaften:

1. $\forall \kappa, \lambda \in \mathcal{A}\ (\kappa < \lambda \Rightarrow E(\kappa) \leq E(\lambda)$
2. $\forall \kappa \in \mathcal{A}\ \mathrm{cof}\big(E(\kappa)\big) > \kappa$

Dann existiert eine generische Erweiterung $M[G]$ von M, so dass Kardinalzahlen und Konfinalitäten erhalten werden und in $M[G]$ für alle regulären κ $E(\kappa) = 2^\kappa$ gilt.

Wir zeigen in diesem Vortrag eine schwächere Form, bei der $\mathrm{dom}(E)$ eine Teilmenge von $\{\kappa \in \mathrm{Card} \mid \kappa \text{ regulär}\}$ ist. Die starke Version des Satzes wird Thema des nachfolgenden Vortrags sein.

Lemma 3.1:

Sei P Forcing-Halbordnung. Dann ist P λ-abgeschlossen gdw. für jedes $\beta < \lambda^+$ jede monoton fallende Folge $\langle p_\alpha \mid \alpha < \beta \rangle$ in P eine untere Schranke hat.
Dies wird benötigt zum Beweis von

Lemma 3.2:

Sei M ZFC-Modell, $G \times H$ M-generisch über $P \times Q$, wobei P λ-abgeschlossen sei und Q die λ^+-Antiketteneigenschaft habe.

1. Sei $f : \lambda \to M \in M[G \times H]$. Dann ist $f \in M[H]$.
2. Es gilt $(2^\lambda)^{M[G\times H]} = (2^\lambda)^{M[H]}$.

Beweisidee: Sei $\dot{f}$ $G \times H$-Name von f. Setze für $\alpha < \lambda$

$$\begin{aligned} D_\alpha \quad := \quad & \{p \in P \mid \exists\ W \text{maximale Antikette in } Q, \{\chi_{\alpha,p,q} \mid q \in W\} \\ & \forall q \in W \quad (p,q) \Vdash \dot{f}(\alpha) = \chi_{\alpha,p,q}\}. \end{aligned}$$

Man kann dann zeigen, dass D_α offene dichte Menge ist und der Durchschnitt
$D = \bigcap\{D_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ dank der λ-Abgeschlossenheit von P ebenfalls. Whle dann $p \in D \cap G$, maximale Antiketten W_α und Familien $\{\chi_{\alpha,p,q} \mid q \in W_\alpha\}$ der Definition von D_α entsprechend. Es existiert dann ein eindeutiges $Q_\alpha \in H \cap W_\alpha$.
$M[G \times H] \models f(\alpha) = \chi_{\alpha,p,q_\alpha}$ definiert dann f in $M[H]$.
Die zweite Behauptung folgt trivial aus der ersten.

Beweisskizze Easton

Konstruktion einer Forcing-Halbordnung und Herleitung ihrer kombinatorischen Eigenschaften

P_κ sei die $E(\kappa)$ Teilmengen adjungierende Forcing-Halbordnung, P das Easton-Produkt der P_κ, d.h.

$$P = \{p \in \prod_{\kappa \in \mathcal{A}} P_\kappa \mid \forall \gamma \in \mathcal{A} : \overline{\overline{s(p) \cap \gamma}} < \gamma\}.$$

Wir schreiben $p = \langle p_\kappa \mid p_\kappa \in p_\kappa \rangle$. Mit $p \leq_P q \Leftrightarrow \forall \kappa \; p_\kappa \leq q_\kappa$ ist P Forcing-Halbordnung.

Sei P' die Menge aller Funktionen p, deren Definitionsbereich aus Tripeln (κ, α, ν) mit $\kappa \in \mathrm{dom}(E)$, $\alpha < E(\kappa)$ und $\nu < \kappa$ besteht mit $\mathrm{rng}(p) \subseteq 2$ und

$$\forall \gamma \in \mathcal{A} \; \overline{\overline{\{(\kappa, \alpha, \nu) \in \mathrm{dom}(p) \mid \kappa \leq \gamma\}}} < \gamma.$$

Wir definieren außerdem, von der P'-Definition ausgehend, für reguläre λ:

$$p_{\leq\lambda} = p \restriction \{(\kappa, \alpha, \nu) \mid \kappa \leq \lambda\}, \qquad p_{>\lambda} = p \restriction \{(\kappa, \alpha, \nu) \mid \kappa > \lambda\}.$$

und $P_{\leq\lambda} = \{p_{\leq\lambda} \mid p \in P'\}$, $P_{>\lambda} = \{p_{>\lambda} \mid p \in P'\}$.
Es gilt dann $P \cong P' \cong P_{\leq\lambda} \times P_{>\lambda}$, wir können also im Folgenden von Gleichheit ausgehen.

Wir können nun G P-generisch wählen, die Projektion G_κ ist dann P_κ-generisch. Es folgt $2^\kappa \geq E(\kappa)$ in $M[G]$.

Es wird nun gezeigt, dass $P_{\leq\lambda}$ die λ^+-c.c. hat (Lemma 15.4), und $P_{>\lambda}$ λ-abgeschlossen ist, da für $C = \langle p_\alpha \mid \alpha < \beta \leq \lambda \rangle$ monoton fallend $\bigcup C \in P_{>\lambda}$ ist.

Erhaltung von Kardinalzahlen und Konfinalitäten

Es genügt zu zeigen, dass eine in M reguläre Kardinalzahl κ in $M[G]$ regulär bleibt. Die Annahme, dass es $\lambda = (\mathrm{cof}(\kappa))^{M[G]} < \kappa$ gebe, wird mittels Lemma 3.2.1 zur Aussage „κ ist singulär in $M[G_{\leq\lambda}]$“ reduziert und dort zum Widerspruch geführt.
Daraus folgt $M[G] \models 2^\kappa = E(\kappa)$.

Beweis von $M[G] \models 2^\kappa \leq E(\kappa)$

Nach Lemma 3.2.2 gilt $(2^\kappa)^{M[G]} = (2^\kappa)^{M[G_{\leq\kappa}]}$.
Man kann nun $\overline{\overline{P_{\leq\kappa}}} = E(\kappa)$ zeigen. Zusammen mit der κ^+-c.c. bedeutet das, dass man analog zum Beweis der Erzwingung einer einzelnen Aussage „$2^\kappa = \lambda$“ über *nice names* schließen kann.