Klassen Forcing

Daniel Kühlwein

16. Mai 2007

Inhaltsverzeichnis

1 Klassen Forcing **2**

2 Forcing Theorem für $M[G]$: **3**

3 ZFC in $M[G]$ **5**

4 Anhang **8**

4.1 Definitionen 8

4.2 Sätze und Lemmas 9

1 Klassen Forcing

Entgegen dem Titel werden wir in diesem Vortrag nicht generelles Klassen-Forcing, sondern nur folgenden Spezialfall behandeln:

Theorem 1.1 *(Easton) Sei M ein abzählbar transitives Modell von ZFC+GCH. Weiter sei F eine über M definierbare Funktion mit $dom(f) \subseteq M$ von den reguläre Kardinalzahlen in die Menge der Kardinalzahlen mit folgenden Eigenschaften: $\forall$ regulären κ, λ:*

1. $F(\kappa) > \kappa$
2. $F(\kappa) \leq F(\lambda)\ \forall \kappa \leq \lambda$
3. $cf F(\kappa) > \kappa$

Dann gibt es eine generische Erweiterung $M[G]$ von M in der gilt: M und $M[G]$ haben dieselben Kardinalzahlen und Konfinalitäten und für alle regulären κ gilt:

$$M[G] \models 2^{\kappa} = F(\kappa)$$

Im letzten Vortrag wurde dieser Satz für den Fall, dass F nur auf einer Menge definiert ist gezeigt. Ist $range(F)$ = reguläre Kardinalzahlen kann uns normales Forcing, d.h. forcen mit einer Menge $P \in M$ nicht das gewünschte Ergebnis liefern. Dies folgt direkt aus Katrins Vortrag:
Zur Erinnerung: Ein *nice name* für eine Menge $x \in M[G]$ ist ein Element $\dot{\tau} \in M$ der Form $\dot{\tau} = \bigcup \{\{\pi\} \times A_{\pi} | \pi \in dom(\dot{x})\}$ wobei A_{π} eine Antikette in P ist und $\dot{x}^G = x$.
Wir hatte gezeigt, dass jede Teilmenge $\kappa' \subset \kappa$ in $M[G]$ durch einen nice name $\dot{\tau} \in M$ repräsentiert wird. D.h. wir können 2^{κ} in $M[G]$ durch die Anzahl der nice names beschränken. $(2^{\kappa})^{M[G]} \leq (2^{\kappa})^M * |P|^{|P|}$. Für κ groß genug können wir also durch Forcing mit einer Klasse die Kardinalität der Potenzmenge nicht mehr nach Belieben verändern.

Somit müssen wir mit einer echten Klasse forcen.

Beweis: Zunächst wollen wir einige allgemeine Aussagen über das Forcen mit einer Klasse treffen. Sei also $P \subset M$ eine in M definierbare Klasse und eine Forcing Halbordnung.

Wir nennen $G \subset P$ *generisch* über M wenn gilt:

- i $p \leq q$ und $p \in G$ impliziert $q \in G$
- ii $p, q \in G$ impliziert $\exists r \in G\ r \leq p \wedge r \leq q$
- iii Ist D eine Klasse in M und dicht in P, dann gilt $D \cap G \neq \emptyset$

Ist M abzählbar existiert solch ein G, da es nur abzählbar viele Klassen in M gibt. Dies gilt da jede Klasse von der Form $\{x | \varphi(x, \vec{p})\}$ wobei φ eine endliche Formel der ε Sprache ist und $\vec{p} \in M$. Da die abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist gibt es aber nur abzählbar viele Formeln, abzählbar viele Parameter und somit auch nur abzählbar viele Klassen. Sei $< D_n | n \in \omega >$ eine Aufzählung aller dichten Klassen. Nun bilden wir eine Folge p_i mit $p_i \in D_n$

und $p_i \leq p_j$ für alle $i \leq j$. Sei $G = \{p \in P | \exists n \in \omega \ p \geq p_n\}$. Dann ist G ein Filter auf P: Seien $p, q \in G$. Wähle $n, m \in \omega$ mit $p \geq p_n$, $q \geq p_m$. Dann sind $p, q \geq p_{max\{p_n, p_m\}}$. Sei D eine dichte Klasse in P. Dann $D = D_n$ für ein $n \in \omega$ und $p_n \in G \cap D \neq \emptyset$

Wir definieren $M[G] = \{\dot{x}^G | \dot{x} \in M\}$ analog zum normalen Forcing wobei $\dot{x}^G = \{\dot{y}^G | \exists p \in G(\dot{y}, p) \in \dot{x}\}$.

Für $M[G]$ gilt:

1. $M[G]$ ist transitiv:
   Sei $u \in x \in M[G]$. Dann existieren $p \in P, \dot{x} \in M$ mit $\dot{x}^G = x$, $(\dot{y}, p) \in \dot{x}$ und $\dot{y}^G = u$. Dann ist $u = \dot{y}^G \in M[G]$.

2. Wir definieren rekursiv für alle $x \in M$: $\check{x} = \{(\check{y}, 1_P) | y \in x\}$ dann gilt $\check{x}^G = x \in M[G]$.

3. $M \subseteq M[G]$

Wir wollen nun das Forcing Theorem für $M[G]$ beweisen:

2 Forcing Theorem für $M[G]$:

1. $M[G] \models \varphi(x_1, ..., x_n)$ genau dann, wenn $\exists p \in G p \Vdash \varphi(x_1, ..., x_n)$

2. $Forc_\varphi = \{(p, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n) \in M | p \Vdash \varphi(\dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)\}$ ist in M definierbar.

Zunächst einige Hilfsaussagen:

Lemma 2.1 *1. $p \Vdash \varphi$ und $q \leq p$, dann $q \Vdash \varphi$*

2. $p \Vdash \varphi, \varphi \rightarrow \psi$, dann $p \Vdash \psi$

3. Für jede reguläre Kardinalzahl λ gilt: $(\dot{x}, p) \in \dot{y}, p \in P$ dann $p \Vdash \dot{x} \in \dot{y}$

Beweis: Für die erste Aussage bemerken wir, dass für alle Filter G gilt: aus $q \in G$ folgt $p \in G$. Die zweite Aussage folgt aus den Definitionen und dass wir aus $\varphi \rightarrow \psi$ und $M[G] \models \varphi$ $M[G] \models \psi$ schliessen könne. In der letzten Aussage folgt aus den Definitionen $\dot{x}^G \in \dot{y}^G$ in $M[G]$ für alle G mit $p \in G$.

Lemma 2.2 *Für $\varphi(\vec{v})$ und $\psi(\vec{v})$ seien $Forc_\varphi$ und $Forc_\psi$ definierbar in M. Weiterhin gelte, dass aus $M[G] \models \varphi(\vec{\dot{x}}^G)$ folgt: Es existiert ein $q \in G$ mit $q \Vdash \varphi(\vec{\dot{x}})$. Dann gilt für alle $\vec{\dot{x}} \in M$:*

1. $p \Vdash (\varphi \wedge \psi)(\vec{\dot{x}})$ genau dann, wenn $p \Vdash \varphi(\vec{\dot{x}})$ und $p \Vdash \psi(\vec{\dot{x}})$

2. $p \Vdash \neg\varphi(\vec{\dot{x}})$ genau dann, wenn $\forall q \leq p$ gilt $\neg q \Vdash \varphi(\vec{\dot{x}})$

3. $p \Vdash \forall v_o \varphi(v_0, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$ genau dann, wenn $\forall \dot{x}_0 \in M p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, ..., \dot{x}_n)$

Beweis:

1. Angenommen $p \Vdash (\varphi \wedge \psi)(\vec{\dot{x}})$. Da $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$ und $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$ folgt nach Lemma 2.1 $p \Vdash \varphi(\vec{\dot{x}})$ und $p \Vdash \psi(\vec{\dot{x}})$.
   Umgekehrt gelte nun $p \Vdash \varphi(\vec{\dot{x}})$ und $p \Vdash \psi(\vec{\dot{x}})$. Sei G M-generisch mit $p \in G$. Nach Definition gilt $M[G] \models \varphi(\vec{\dot{x}}^G)$ und $M[G] \models \psi(\vec{\dot{x}}^G)$. Somit gilt auch $M[G] \models (\varphi \wedge \psi)(\vec{\dot{x}})$.

2. Sei $p \Vdash \neg\varphi(\vec{\dot{x}})$ und $q \leq p$. Sei G M-generisch mit $q \in G$. Da G ein Filter ist folgt $p \in G$. Nach Voraussetzung gilt $M[G] \models \neg\varphi(\vec{\dot{x}}^G)$. Also $\neg M[G] \models \varphi(\vec{\dot{x}}^G)$. Ergo $\neg q \Vdash \varphi(\vec{\dot{x}})$.
   Umgekehrt gelte $\forall q \leq p \neg q \Vdash \varphi(\vec{\dot{x}})$. Sei G M-generisch mit $p \in G$. Angenommen $M[G] \models \varphi(\vec{\dot{x}}^G)$. Nach Voraussetzung existiert ein $r \in G$ mit $r \Vdash \varphi(\vec{\dot{x}})$. Da G ein Filter ist gibt es ein $t \in G$ mit $t \leq r$ und $t \leq p$. Nach Lemma 2.1 gilt dann $t \Vdash \varphi(\vec{\dot{x}})$. Aber da $t \leq p$ können wir $\neg t \Vdash \varphi(\vec{\dot{x}})$ folgern. Widerspruch!
   Somit gilt $\neg M[G] \models \varphi(\vec{\dot{x}}^G)$, also $M[G] \models \neg\varphi(\vec{\dot{x}}^G)$. Und, da G beliebig war, $p \Vdash \neg\varphi(\vec{\dot{x}})$.

3. Angenommen $p \Vdash \forall v_o \varphi(v_0, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$. Sei $\dot{x}_0 \in M$, G M-generisch, $p \in G$. Dann gilt $M[G] \models \forall v_o \varphi(v_0^G, \dot{x}_1^G, ..., \dot{x}_n^G)$. Insbesondere $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \dot{x}_1^G, ..., \dot{x}_n^G)$. Also $p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$ und da $\dot{x}_0$ beliebig war folgt die Aussage.
   Gelte nun $\forall \dot{x}_0 \in M p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, ..., \dot{x}_n)$. Sei G M-generisch mit $p \in G$. Weiter sei $z \in M[G], \dot{x}_0 \in M$ mit $\dot{x}_0^G = z$. Dann ist $M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, \dot{x}_1^G, ..., \dot{x}_n^G)$. Da z beliebig war folgt $M[G] \models \forall z \varphi(z, \dot{x}_1^G, ..., \dot{x}_n^G)$ und somit $p \Vdash \forall z \varphi(z, \dot{x}_1, ..., \dot{x}_n)$.

Mit den Ergebnissen von Lemma 2.2 können wir nun auch $Forc_{\varphi\wedge\psi}$, $Forc_{\neg\varphi}$ und $Forc_{\forall v \varphi}$ in M definieren.

Lemma 2.3 *Seien $Forc_\varphi$, $Forc_\psi$ über M definierbar. Weiter gelte für jede generische Erweiterung $M[G]$ und $\dot{x}_0, ..., \dot{x}_{n-1} \in M$:*

$$\textit{Falls } M[G] \models \varphi(\dot{x}_0^G, ..\dot{x}_n^G) \textit{ dann existiert ein } p \in G \textit{ mit } p \Vdash \varphi(\dot{x}_0, ..., dotx_{n-1})$$

Analog für ψ. Dann gilt 2.3 *auch für*

1. $\varphi \wedge \psi$
2. $\neg\varphi$
3. $\forall v_n \varphi$

Beweis: Im folgenden sei immer G M-generisch.

1. Angenommen $M[G] \models (\varphi \wedge \psi)(\vec{\dot{x}}^G)$. Dann gilt $M[G] \models \varphi(\vec{\dot{x}}^G)$ und $M[G] \models \psi(\vec{\dot{x}}^G)$. Nach Voraussetzung existieren $p, q \in G$ mit $p \Vdash \varphi(\vec{\dot{x}})$ und $q \Vdash \psi(\vec{\dot{x}})$. Da G ein Filter ist gibt es $r \in G$ mit $r \leq p$ und $r \leq q$. Nach Lemma 2.1 gilt $r \Vdash \psi(\vec{\dot{x}})$ und $r \Vdash \psi(\vec{\dot{x}})$ und mit Lemma 2.2 folgt $r \Vdash (\varphi \wedge \psi)(\vec{\dot{x}})$.

2. Sei $M[G] \models \neg\varphi(\vec{\dot{x}})$. Sei $D = \{p \in P | p \Vdash \varphi(\vec{\dot{x}}) \vee \forall q \leq p \neg q \Vdash (\vec{\dot{x}})$. Da nach Voraussetzung $Forc_\varphi$ in M definierbar ist, ist D eine Klasse in M.
   Sei $r \in P$. Dann entweder $\forall q \leq r \neg q \Vdash (\vec{\dot{x}})$ und $r \in D$ oder $\exists q \leq r q \Vdash (\vec{\dot{x}})$.

Für solch ein q gilt dann $q \in D$. Folglich ist D dicht in P.
Da G generisch ist gibt es ein $p \in G \cap D$. Wäre $p \Vdash (\vec{x})$ dann würde $M[G] \models (\vec{x}^G)$ folgen, im Widerspruch zu Annahme. Ergo $\forall q \leq p \neg q \Vdash (\vec{x})$ und mit Lemma 2.2 folgt die Aussage.

3. Gelte $M[G] \models \forall v_n \varphi(\dot{x}_0^G, ..\dot{v}_n^G)$. Wir definieren $D = \{p \in P | \forall \dot{x}_n \in Mp \Vdash \varphi(\dot{x}_0, ..., \dot{x}_n) \vee \exists \dot{x}_n \in Mp \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, ..., \dot{x}_n)$. Nach Voraussetzung ist D über M definierbar und damit eine Klasse in M.
Sei $r \in P$. Wenn $\forall \dot{x}_n \in Mr \Vdash \varphi(\dot{x}_0, ..., \dot{x}_n)$ ist $r \in D$. Andernfalls gibt es ein $\dot{x}_n \in M$ mit $\neg r \Vdash \varphi(\dot{x}_0, ..., \dot{x}_n)$. Folglich können wir einen Filter H mit $r \in H$ wählen für den gilt: $M[H] \models \neg\varphi(\dot{x}_0^G, ..., \dot{x}_n^G)$. Mit dem soeben Gezeigten finden wir ein $s \in H$ mit $s \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, ..., \dot{x}_n)$. Da H ein Filter ist gibt es $p \in H$ mit $p \leq r, s$. Dann ist $p \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, ..., \dot{x}_n)$ und somit $p \in D$.
Somit ist D dicht in P. Da G generisch ist gibt es $p \in D \cap G$. Angenommen $\exists \dot{x}_n \in Mp \Vdash \neg\varphi(\dot{x}_0, ..., \dot{x}_n)$ dann gilt für solch ein $\dot{x}_n$: $M[G] \models \neg\varphi(\dot{x}_0^G, ..., \dot{x}_n^G)$, ein Widerspruch zu Voraussetzung.
Ergo gilt $\forall \dot{x}_n \in Mp \Vdash \varphi(\dot{x}_0, ..., \dot{x}_n)$ und mit Lemma 2.2 folgt das Verlangte.

Wenn wir nun wüssten, dass das Forcing Theorem für die Grundformeln $x \in y$ und $x = y$ gelten würde hätten wir es auch schon komplett gezeigt, da sich jede Formel mit endlich vielen Schritten aus $x \in y$, $x = y$ und $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$ und $\forall x \varphi(x)$ aufbauen lässt. Der Beweis hierfür ist analog für den Fall, dass P eine Menge ist und lässt sich z.B. im Burkhard Skript nachlesen.

3 ZFC in $M[G]$

Wir wollen nun zeigen, dass M[G] ein Modell von ZFC ist.

$M[G]$ ist transitiv und nach Mengenlehre I gelten $(Ex)^{M[G]}$, $(Ext)^{M[G]}$ und $(Fund)^{M[G]}$.
$(Inf)^{M[G]}$ folgt, da $\omega^M \in M \subseteq M[G]$.
Für $(Paar)^{M[G]}$ genügt es z.z. dass für alle $a, b \in M[G]$ gilt $\{a, b\} \in M[G]$. Seien $a, b \in M[G], \dot{a}, \dot{b} \in M$ mit $\dot{a}^G = a, \dot{b}^G = b$. Setze $\dot{c} = \{(\dot{a}, 1), (\dot{b}, 1)\}$ Dann ist $\dot{c}^G = \{\dot{a}^G, \dot{b}^G\} = \{a, b\} \in M[G]$.

Bisher haben wir alle Aussagen für ein beliebiges P und G gezeigt. Die restlichen Axiome folgen jedoch nicht ohne weiteres.

Sei also P die Klasse aller Funktionen p mit Werten in $\{0, 1\}$ deren Definitionsbereich aus Tripeln (κ, α, β) wobei κ eine reguläre Kardinalzahl sei, $\alpha < \kappa$, $\beta < F(\kappa)$ und für jede reguläre Kardinalzahl γ gelte:

$$|\{(\kappa, \alpha, \beta) \in dom(p) : \kappa \leq \gamma\}| < \gamma$$

Weiterhin sei $p < q$ genau dann wenn $q \subset p$.

Für jede reguläre Kardinalzahl λ definieren wir wie im letzten Vortrag $p^{\leq\lambda}$, $p^{>\lambda}$ $P^{\leq\lambda}$ und $P^{>\lambda}$:

$$P^{\leq\lambda} = \{p^{\leq\lambda} : p \in P\},\ P^{>\lambda} = \{p^{>\lambda} : p \in P\}$$

und

$$p^{\leq\lambda} = p\lceil\{(\kappa, \alpha, \beta) : \kappa \leq \lambda\},\ p^{>\lambda} = p\lceil\{(\kappa, \alpha, \beta) : \kappa > \lambda\}$$

Mit den bisherigen Definitionen gilt: für jede reguläre Kardinalzahl λ ist $P = P^{>\lambda} \times P^{\leq\lambda}$, $P^{>\lambda}$ ist λ-abgeschlossen, $P^{\leq\lambda}$ ist eine Menge und erfüllt die λ^+-chain condition. [1]

Sei nun G ein M-generischer Filter über P. Für jede reguläre Kardinalzahl λ sei $G_\lambda = G \cap P^{\leq\lambda}$ generisch über $P^{\leq\lambda}$ und $G_{>\lambda} = G \cap P^{>\lambda}$.

Lemma 3.1 *Es gilt $G = G_\lambda \times G_{>\lambda}$, G_λ ist generisch über $P^{\leq\lambda}$ und $G_{>\lambda}$ ist generisch über $P^{\leq\lambda}$.*

Beweis: $G \subseteq G_\lambda \times G_{>\lambda}$ ist klar. Sei andererseits nun $(p,q) \in G_\lambda \times G_{>\lambda}$. Dann existiert $(p,p') \in G$, $(q,q') \in G$ und, da G generisch ist, auch ein $r \in G$ mit $r \leq (p,p'), r \leq (q,q')$. Somit gilt $r \leq (p,q)$ und folglich ist $(p,q) \in G$.
Bleibt z.z., dass G_λ generisch über $P^{\leq\lambda}$ ist. Einzig die Ausage über den Schnitt mit dichten Mengen benötigt etwas Arbeit. Sei D_λ dicht in $P^{\leq\lambda}$. Dann ist $D_\lambda \times P^{>\lambda}$ dicht in P und weil G generisch in P ist, ist der Schnitt von $G \cap D_\lambda \times P^{>\lambda} \neq \emptyset$. Sei $p \in G \cap D_\lambda \times G_{>\lambda}$. Dann ist $p^{\leq\lambda} \in G_\lambda$. Somit ist G_λ generisch in $P^{\leq\lambda}$. Der Beweis für $G_{>\lambda}$ verläuft analog.

Lemma 3.2 *Es gilt $P = \bigcup P^{\leq\lambda}$*

Beweis: $\bigcup P^{\leq\lambda} \subseteq P$ ist klar. Andererseits sei $p \in P$. Dann gibt es eine reguläre Kardinalzahl κ so dass $p\lceil\kappa = p$. Ansonsten wäre $\bigcup\{\kappa | \exists(\kappa,\alpha,\beta) \in dom(p)\} = Ord$. Widerspruch zu p ist Menge.

Lemma 3.3 *Für alle $x \in M[G]$ gibt es ein reguläres λ_x mit $x \in M[G_{\lambda_x}]$. Insbesondere ist $M[G] = \bigcup_{\lambda \text{ regulär}} M[G_\lambda]$.*

Beweis: Sei $\dot{x} \in M$ ein Name für $x \in M[G]$. Wir definieren $\lambda_{\dot{x}} = min\{\kappa | \kappa \text{ regulär} \wedge \kappa \geq \sup\{\alpha, \beta | \exists(\dot{y},p) \in \dot{x}\ \alpha = \lambda_{\dot{y}}\ \beta = min\{\gamma | p \in P^{\leq\gamma}\}\}\}$. Dann gilt $x \in M[G_{\lambda_x}]$ und $M[G] \subseteq \bigcup_{\lambda \text{ regulär}} M[G_\lambda]$. Sei andererseits $a \in M[G_\lambda]$ für eine reguläre Kardinalzahl λ und $\dot{a} \in M$ ein Name für a. Dann ist $b = \dot{a} \cap dom\{\dot{a}\} \times P^{\leq\lambda}$ ebenfalls ein Name für a und es gilt außerdem $a = b^{G_\lambda} = b^G \in M[G]$.
Somit $M[G] = \bigcup_{\lambda \text{ regulär}} M[G_\lambda]$.

Lemma 3.4 *Jede Funktion $f : \lambda \to M$ in $M[G_{>\lambda} \times G_\lambda]$ ist in $M[G^{\leq\lambda}]$*

Beweis Sei $\dot{f}$ ein Name für f. OBdA gelte für alle $p \in P$: $p \Vdash$ f ist Funktion $\wedge$ $dom(\dot{f}) = \check{\lambda}$. Für jedes $\alpha < \lambda$ sei $D_\alpha \subset P^{>\lambda}$ wie folgt definiert: $p \in D_\alpha$ genau dann, wenn es eine maximale Antikette $W \subset P^{\leq\lambda}$ und eine Familie $\{a^{(\alpha)}_{p,q} : q \in W\}$ gibt, so dass für alle $q \in W$ gilt:

$$(p,q) \Vdash (\dot{f})(\check{\alpha}) = \check{a}^{(\alpha)}_{p,q}$$

Wir behaupten, dass jedes D_α offen dicht in $P^{>\lambda}$ ist.
Ist $p \in D_\alpha$ und $q \leq p$ gilt für alle $r \in W$: $(q,r) \Vdash (\dot{f})(\check{\alpha}) = \check{a}^{(\alpha)}_{q,r}$. Somit ist $q \in D_\alpha$ und D_α ist offen.
Sei $p_0 \in P^{>\lambda}$ beliebig. Wir suchen ein $p \in D_\alpha$ so dass $p \leq p_0$. Mit dem Forcing Theorem finden wir ein $p_1 \leq p_0$, $q_1 \in P^{\leq\lambda}$ und ein $\check{a_1} \in A$ so dass $(p_1,q_1) \Vdash$

[1] siehe Lemma 4.1

$\dot{f}(\check{\alpha}) = \check{a_1}$. Via Induktion über $\gamma < \lambda^+$ kontruieren wir $p_\gamma \in P^{>\lambda}, q_\gamma \in P^{\leq\lambda}$ und $a_\gamma \in A$ so dass $p_0 \geq p_1 \geq ... \geq p_\gamma \geq ...$, die q_γ paarweise inkompatibel sind und dass $(p_\gamma, q_\gamma) \Vdash \dot{f}(\check{\gamma}) = \check{a_\gamma}$. Falls $\{q_\xi : \xi < \gamma\}$ nicht maximal ist finden wir, da $P^{>\lambda}$ λ-abgeschlossen ist, solche p_γ, q_γ und a_γ. Da $P^{\leq\lambda}$ die λ^+-chain condition hat gibt es ein $\beta < \lambda^+$ so dass $W = \{q_\gamma : \gamma < \beta\}$ eine maximale Antikette ist. Dann finden wir ein $p \in P^{>\lambda}$ das stärker als alle p_γ, $\gamma < \beta$ ist. Für dieses p gilt dann nach Konstruktion $p \in D_\alpha$. Ergo ist D_α offen dicht.
$\bigcap_{\alpha<\lambda} D_\alpha$ ist ebenfalls offen dicht:
Die Offenheit ist klar ersichtlich, für die 'dicht' Eigenschaft wählen wir ein $p \in P^{>\lambda}$. Da alle D_α dicht sind finden wir eine absteigende Sequenz $p_0 \geq p_1 \geq ...$ mit $p_\gamma \in D_\gamma$ und $p_\gamma \leq p$ für alle $\gamma < \lambda$. Da $P^{>\lambda}$ λ-abgeschlossen ist finden wir ein $p_\lambda \leq p_\gamma \forall \gamma < \lambda$ und $p_\lambda \in D_\gamma \forall \gamma < \lambda$, da alle D_γ offen sind.
Somit existiert ein $p \in G \cap P^{>\lambda}$ mit $p \in D_\alpha$ für alle $\alpha < \lambda$.Wir wählen (in M) für jedes $\alpha < \lambda$ eine maximale Antikette $W_\alpha \subset P^{\leq\lambda}$ und eine Familie $\{a^{(\alpha)}_{p,q} : q \in W_\alpha\}$ so dass für jedes $q \in W_\alpha$ gilt: $(p, q) \Vdash \dot{f}(\check{\alpha}) = a^{(\alpha)}_{p,q}$. Für jedes α betrachten wir nun die Klasse $\{r | \exists q \in W_\alpha \text{ mit } r \leq q\}$ so ist diese dicht in $P^{\leq\lambda}$. Da G_λ generisch ist gibt es genau ein $q \in W_\alpha$ so dass $q \in G_\lambda$. Somit gilt für alle $\alpha < \lambda$:

$$f(\alpha) = a^{(\alpha)}_{p,q} \text{ wobei } q \in W_\alpha \cap G_\lambda$$

Hiermit ist f jedoch schon in $M[G_\lambda]$ definiert.
□

$(Vereinigung)^{M[G]}$ Es genügt z.z. $\forall x \in M[G]$ ist $\bigcup x \in M[G]$. Sei $x \in M[G]$. Dann gibt es λ mit $x \in M[G_\lambda]$. In $M[G_\lambda]$ gilt jedoch ZFC. Insbesondere ist $\bigcup x \in M[G_\lambda]$ und somit, nach Lemma 3.3, ist $\bigcup x \in M[G]$.

$(Auswahlaxiom)^{M[G]}$ Wir zeigen, dass jede Menge zu einer Ordinalzahl bijektiv ist. Sei $x \in M[G]$. Dann existiert λ mit $x \in M[G_\lambda]$ Da in $M[G_\lambda]$ ZFC gilt finden wir ein f, dass x bij. auf eine Ordinalzahl α in $M[G_\lambda]$ abbildet. Dann ist $f \in M[G]$ und α bleibt eine Ordinalzahl in $M[G]$.

$(Ersetzung)^{M[G]}$ Wir benutzen eine leicht abgeänderte Version von Lemma 3.4. In $M[G]$ definiere $\varphi(\alpha, v)$ eine Funktion $K : Ord \to M[G]$. Es reicht z.z. dass für alle regulären Kardinalzahlen $\{K(\alpha) | \alpha < \lambda\}$ eine Menge in $M[G]$ ist. Mit dem Forcing Theorem finden wir ein $p \in P$ mit

$$p \Vdash \forall\alpha\ \exists!\ v\ \varphi(\alpha, v)$$

Und alle $q \leq p$ forcen dies auch. Da alle dichten Klassen die Klasse aller $q \leq p$ schneiden können wir OBdA annehmen, dass alle $p \in P$ das Obige forcen.
Sei λ eine reguläre Kardinalzahl. Wie in Lemma 3.4 definieren wir für jedes $\alpha < \lambda$ eine Klasse $D_\alpha \subset P^{>\lambda}$:

$$p \in D_\alpha \text{ genau dann, wenn es eine maximale Antikette } W \subset P^{\leq\lambda}$$

$$\text{und eine Familie } \{\dot{a}^{(\alpha)}_{p,q} | q \in W\} \text{ gibt, so dass für alle } q \in W \text{ gilt:}$$

$$(p, q) \Vdash \varphi(\alpha, \dot{a}^{(\alpha)}_{p,q})$$

Wie in Lemma 3.4 können wir zeigen, dass alle D_α offen dicht sind und, da $P^{>\lambda}$ λ-abgeschlossen ist, $\bigcap_{\alpha<\lambda} D_\alpha$ dicht ist. Daher gibt es ein $p \in G_{>\lambda} \cap P^{>\lambda}$

so dass $p \in D_\alpha$ für alle $\alpha < \lambda$. In M wählen wir nun für jedes $\alpha < \lambda$ eine maximale Antikette $W_\alpha \subset P^{\leq\lambda}$ so dass $(p, q) \Vdash \varphi(\alpha, \dot{a}^{(\alpha)}_{p,q})$ für alle $q \in W_\alpha$. Sei nun $S = \{\dot{a}^{(\alpha)}_{p,q} | \alpha < \lambda, q \in W_\alpha\}$. Dann ist $\{K(\alpha)|\alpha < \lambda\} \subset \{\dot{a}^G|\dot{a} \in S\}$. $\{\dot{a}^G|\dot{a} \in S\}$ ist aber eine Menge in $M[G]$. Somit gibt es ein γ so dass $S^G \in M[G_\gamma]$ und insbesondere $\dot{a}^G = \dot{a}^{G_\gamma}$ für alle $\dot{a} \in S$. Da OBdA $\lambda \leq \gamma$ können wir in $M[G_\gamma]$ auf G_λ zugreifen. In $M[G_\gamma]$ gilt das *Aussonderungsaxiom* und folglich ist $\{\dot{a}^{G_\gamma}|\dot{a} = \dot{a}^{(\alpha)}_{p,q} \in S; \alpha < \lambda, q \in W_\alpha \cap G_\lambda\} = \{K(\alpha)|\alpha < \lambda\} \in M[G_\gamma] \subset M[G]$.

$(Aussonderung)^{M[G]}$ Wie bereits in Mengenlehre I gezeigt wurde impliziert das Ersetzungsschema das Aussonderungsschema: Betrachte einen Term A und ein $x \in M[G]$. Dann gilt entweder $A \cap x = \emptyset$ und $A \cap x \in M[G]$ oder $A \cap x \neq \emptyset$. Wähle dann ein $a \in A \cap x$ und definieren $F : M[G] \to M[G] : \ u \mapsto u$, falls $u \in A \cap x$, $u \mapsto a$ sonst.
Dann ist $A \cap x = F[x] \in M[G]$ nach Ersetzung.

$(Potenzmenge)^{M[G]}$: Sei $a \in M[G]$, $\dot{a} \in M$ mit $\dot{a}^G = a$. Sei $s = \{\dot{y}|\dot{y} \subseteq dom(\dot{a}) \times P^{\leq\lambda_{\dot{a}}}\}$ und $t = \{(\dot{y}, 1_P)|\dot{y} \in s\}$. Dann ist $P(a) \cap M[G] \subseteq t^G$:
Ist $b \in P(a) \cap M[G]$ dann $b \subseteq a$ und $b \in M[G]$. Sei $\dot{b} \in M$ mit $\dot{b}^G = b$. Für $\dot{y} = \{(\dot{x}, p) \in dom(\dot{a}) \times P^{\leq\lambda}|p \Vdash \dot{x} \in \dot{b}\}$ gilt $\dot{y}^G = b = \dot{b}^G$: Für ein $x \in \dot{y}^G$ wähle ein $(\dot{x}, p) \in \dot{y}$ mit $\dot{x}^G = x$ und $p \in G$. Da $p \Vdash \dot{x} \in \dot{b}$ ist $\dot{x}^G$
$in\dot{b}^G = b$. Umgekehrt sei $x \in \dot{b}^G \subseteq \dot{a}^G$. Wähle $(\dot{x}, p) \in \dot{a}$ mit $\dot{x}^G = x$ und $p \in G_\lambda$. Für dieses p gilt dann $p \Vdash \dot{x}^G \in \dot{a}^G$. Dann ist aber $(\dot{x}, p) \in \dot{y}$ und somit $\dot{x}^G \in \dot{y}^G$.
Ergo ist $b = \dot{y}^G$ und $\dot{y} \in s$. Nach der Definition von t folgt $b \in t$.

Somit ist $M[G]$ ein Modell von ZFC. Wir müssen noch zeigen, dass $M[G]$ und M dieselben Kardinalzahlen und Kofinalitäten haben, und dass $2^\kappa = F(\kappa)$ für alle regulären Kardinalzahlen κ in $M[G]$ gilt.
Sei κ also eine reguläre Kardinalzahl in M. Wenn κ keine reguläre Kardinalzahl in $M[G]$ ist, dann gibt es eine Funktion f die ein in M reguläres $\lambda < \kappa$ kofinal in κ abbildet. Wir betrachten P als das Produkt $P = P^{>\lambda} \times P^{\leq\lambda}$. Dann ist $G = G \cap P^{>\lambda} \times G_\lambda$ und $M[G] = M[G \cap P^{>\lambda}][G_\lambda]$. Nach Lemma 3.4 ist f in $M[G_\lambda]$ und κ ist keine reguläre Kardinalzahl in $M[G_\lambda]$ im Widerspruch zu Theorem 4.2, da $P^{\leq\lambda}$ die κ-chain-condition erfüllt und daher κ regulär in $M[G_\lambda]$ ist.
Es bleibt zu zeigen, dass $(2^\lambda)^{M[G]} = F(\lambda)$ für alle regulären Kardinalzahlen λ gilt. Mit Lemma 3.4 folgt, dass jede Teilmenge von λ in $M[G]$ in $M[G_\lambda]$ ist. Somit ist $(2^\lambda)^{M[G]} = (2^\lambda)^{M[G_\lambda]}$. Wie wir schon in Nicolas' Vortrag gesehen haben ist $|P^{\leq\lambda}| = F(\lambda)$ und wie dort kann man über die λ^+-chain-condition $(2^\lambda)^{M[G_\lambda]} \leq F(\kappa)$ folgern. Andererseits ist P so gewählt, dass es für jedes reguläre κ $F(\kappa)$ Teilmengen hinzufügt, also $(2^\lambda)^{M[G_\lambda]} \geq F(\lambda)$.
Ergo $M[G] \models 2^\lambda = F(\lambda)$. □

4 Anhang

4.1 Definitionen

Sei $\alpha \in Card$.

Definition 4.1 *x ist **konfinal** in α genau dann, wenn $x \subseteq \alpha$ und $\forall \beta \in \alpha \exists \gamma \in x$ mit $\beta < \gamma$*

Definition 4.2 *$conf(\alpha) := min\{\ card(x) \mid x$ ist konfinal in $\alpha\ \}$ heisst die **Konfinalität** von α.*

Definition 4.3 *α ist **regulär** genau dann, wenn $conf(\alpha) = \alpha$*

Definition 4.4 *Seien P_κ Halbordnungen. Wir nennen P das **Easton Produkt** von P_κ wenn für alle $p \in P$: $p \in \Pi_{\kappa \in A} P_\kappa$ und wenn für den Träger von p, $s(p) = \{\kappa \in A : p_\kappa \neq \emptyset\}$, gilt:*

$$\text{für jede reguläre Kardinalzahl } \gamma \text{ ist } |s(p) \cap \gamma| < \gamma$$

Definition 4.5 *Eine Halbordnung P erfüllt die **κ-chain condition**, falls jede Antikette in P Kardinalität kleiner κ hat.*

Definition 4.6 *Eine Halbordnung P heisst **κ-abgeschlossen**, falls für jedes $\lambda \leq \kappa$ jede absteigende Sequenz $p_0 \geq p_1 \geq ... \geq p_\alpha \geq ...(\alpha < \lambda)$ eine untere Schranke hat.*

Definition 4.7 *Sei P eine Halbordnung. $W \subset P$ heisst Antikette, falls alle Elemente von W inkompatibel sind, d.h. für alle $p, q \in W \nexists r \in W$ so dass $r \leq p$ und $r \leq p$.*

Definition 4.8 *Sei P eine Halbordnung. Eine Menge $D \subset P$ heisst **dicht** in P, falls für jedes $p \in P$ ein $q \in D$ existiert mit $q \leq p$.*

Definition 4.9 *Sei P eine Halbordnung. Eine Menge $D \subset P$ heisst **offen dicht** falls D dicht in P ist und aus $p \in D$ und $q \leq p$ folgt, dass $q \in D$ ist.*

4.2 Sätze und Lemmas

Lemma 4.1 *Mit den bisherigen Definitionen gilt: für jede reguläre Kardinalzahl λ ist $P = P^{>\lambda} \times P^{\leq\lambda}$, $P^{>\lambda}$ ist λ-abgeschlossen, $P^{\leq\lambda}$ ist eine Menge und erfüllt die λ^+-chain condition.*

Beweis Wie schon im letzten Vortrag dargelegt ist $P^{\leq\lambda}$ das Easton Produkt von P_κ, $\kappa \leq \lambda$ und somit eine Menge. Die anderen Aussagen wurden beide schon im Beweis von 15.18 für Mengen gezeigt.

Theorem 4.1 *Siehe Jech, Theorem 14.7*

Theorem 4.2 *Ist κ eine reguläre Kardinalzahl und erfüllt P die κ-chain-condition dann ist κ auch eine reguläre Kardinalzahl in der generischen Erweiterung.*

Beweis Siehe Jech, Theorem 15.3