Seminar zur Mengenlehre SS 2007
Prof. Dr. P. Koepke

Produkt-Forcing

Karen Räsch

16.04.2007

Literatur. Jech, Thomas: Set Theory (Third Millenium Edition, revised and expanded). Springer, Berlin, 2002; S. 115 ff., 229 ff., 272 ff.

In diesem Vortrag wird ausgehend vom Produkt zweier Forcing-Halbordnungen für beliebig große Indexmengen I und zugehörige Familien von Forcing-Halbordnungen $\{ P_i | i \in I \}$ das κ-Produkt dieser Forcing-Halbordnungen definiert, wobei κ eine reguläre Kardinalzahl ist.
Es wird untersucht, inwiefern sich bestimmte Eigenschaften der zugrunde liegenden Forcing-Halbordnungen auf das Produkt übertragen. Dass aus der λ-Abgeschlossenheit aller P_i für $\lambda < \kappa$ auch die des κ-Produktes folgt, ist das erste Resultat in diesem Zusammenhang. Nachdem festzustellen ist, dass die Übertragung von Antiketten-Eigenschaften unabhängig von ZFC ist, wird eine neue Eigenschaft (K) betrachtet. Da sich diese auf Produkte überträgt, gelingt es eine hinreichende Bedingung für c.c.c. Produkte zu finden. Abschließend gilt es ein Theorem zu beweisen, welches sehr genaue Anforderungen an die P_i und $\lambda \in \mathrm{Card}$ stellt, damit das κ-Produkt der P_i die λ- bzw. λ^+-Antiketteneigenschaft hat.

Definition 1. Seien P_1 und P_2 Forcing-Halbordnungen. Das Produkt $P_1 \times P_2$ wird geordnet durch

$$(p_1, p_2) \leq (q_1, q_2) \qquad \text{gdw.} \qquad p_1 \leq_{P_1} q_1 \text{ und } p_2 \leq_{P_2} q_2.$$

Sei G ein $(P_1 \times P_2)$-generischer Filter über M, so setze

$$G_1 := \{ p_1 \in P_1 \mid \exists p_2 \ (p_1, p_2) \in G \},$$
$$G_2 := \{ p_2 \in P_2 \mid \exists p_1 \ (p_1, p_2) \in G \}.$$

Bemerkung 2. (1) G_1 und G_2 sind P_1- bzw. P_2-generische Fiter über M.

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass $G_1 \subseteq P_1$ ein Filter ist. Für $D \in M$ dicht in P_1, ist $D \times P_2$ dicht in $P_1 \times P_2$, also $G \cap (D \times P_2) \neq \varnothing$ und damit auch $G_1 \cap D \neq \varnothing$. Analog zeigt man die Eigenschaften für G_2. □

(2) Es gilt $G_1 \times G_2 = G$.

Beweis. Offenbar gilt $G_1 \times G_2 \supseteq G$. Sei nun $(p_1, q_2) \in G_1 \times G_2$. Dann existieren p_2 und q_1 mit $(p_1, p_2) \in G$ und $(q_1, q_2) \in G$. Wähle $(r_1, r_2) \in G$ mit $(r_1, r_2) \leq (p_1, p_2)$ und $(r_1, r_2) \leq (q_1, q_2)$. Aus $(r_1, r_2) \leq (p_1, q_2)$ folgt $(p_1, q_2) \in G$. □

Lemma 3 (Das Produkt-Lemma). Seien P_1, P_2 Forcing-Halbordnungen über M. Dann ist

$G \subseteq P_1 \times P_2$ generisch über M gdw. $G = G_1 \times G_2$ für $G_1 \subseteq P_1$ generisch über M und $G_2 \subseteq P_2$ generisch über $M[G_1]$.

Weiterhin gilt

$$M[G] = M[G_1][G_2].$$

Beweis. Zeige zunächst die behauptete Äquivalenz.

($\rightarrow$) Sei $G \subseteq P_1 \times P_2$ generisch über M, so betrachte G_1 und G_2 aus Definition 1. Es bleibt die Generizität von G_2 über $M[G_1]$ zu zeigen. Sei dazu $D_2 \in M[G_1]$ dicht in P_2. Wähle $\dot{D}_2 \in M$ mit $\dot{D}_2^{G_1} = D_2$ und $p_1 \in G_1$ mit $p_1 \Vdash \dot{D}_2$ ist dicht in $\check{P}_2$. Betrachte

$$D = \{ (r_1, r_2) \mid r_1 \leq p_1 \text{ und } r_1 \Vdash \check{r}_2 \in \dot{D}_2 \}$$

und zeige, dass dies für $p_2 \in G_2$ dicht unter (p_1, p_2) ist. Sei $(q_1, q_2) \leq (p_1, p_2)$ und H ein P_1-generischer Filter über M mit $q_1 \in H$. Da D_2 in $M[H]$ dicht in P_2 liegt, existiert in $M[H]$ ein $r_2 \in D_2$ mit $r_2 \leq q_2$. Somit gibt es ein $s_1 \in H$ mit $s_1 \Vdash \check{r}_2 \in \dot{D}_2$, also auch ein $r_1 \in H$ mit $r_1 \leq q_1$ und $r_1 \Vdash \check{r}_2 \in \dot{D}_2$. Das erhaltene Paar (r_1, r_2) liegt in D, womit dessen Dichtheit unter (p_1, p_2) gezeigt ist.
Somit existiert $(r_1, r_2) \in D \cap G$ und es gilt $r_1 \Vdash \check{r}_2 \in \dot{D}_2$ und $r_1 \in G_1$, woraus

$$M[G_1] \models r_2 \in D_2$$

folgt. Damit ist $r_2 \in D_2 \cap G_2$, also G_2 generisch über $M[G_1]$.

($\leftarrow$) Seien andererseits $G_1 \subseteq P_1$ generisch über M und $G_2 \subseteq P_2$ generisch über $M[G_1]$ gegeben. Offenbar ist $G = G_1 \times G_2$ ein Filter auf $P_1 \times P_2$. Zeige nun die M-Generizität von G. Sei dazu $D \in M$ dicht in $P_1 \times P_2$. Setze

$$D_2 = \{ p_2 \mid \exists p_1 \in G_1 \ (p_1, p_2) \in D \}.$$

Es ist $D_2 \in M[G_1]$ und für beliebiges festes $q_2 \in P_2$ ist

$$D_1 = \{ p_1 \mid \exists p_2 \leq q_2 \ (p_1, p_2) \in D \} \in M$$

dicht in P_1, denn für $q_1 \in P_1$ ist $(q_1, q_2) \in P_1 \times P_2$, womit ein $(p_1, p_2) \leq (q_1, q_2)$ mit $(p_1, p_2) \in D$ existiert, also $p_1 \in D_1$. Somit gibt es ein $p_1 \in G_1 \cap D_1$, d.h. auch ein $p_2 \leq q_2$ aus D_2. Da also D_2 dicht in P_2 ist, erhält man $D_2 \cap G_2 \neq \varnothing$ und damit auch

$$(G_1 \times G_2) \cap D = G \cap D \neq \varnothing.$$

Da $G_1 \times G_2 \in M[G_1][G_2]$, ist $M[G] \subseteq M[G_1][G_2]$. Aus $G_1, G_2 \in M[G_1 \times G_2]$ ergibt sich die andere Inklusion. $\square$

Korollar 4. Seien P_1, P_2 Forcing-Halbordnungen über M und $G_1 \subseteq P_1$ generischer Filter über M und $G_2 \subseteq P_2$ über $M[G_1]$. Dann ist G_1 generisch über $M[G_2]$ und es gilt

$$M[G_1][G_2] \;=\; M[G_2][G_1].$$

Nun werden unendliche Produkte von Forcing-Halbordnungen eingeführt.

Definition 5. Sei $\{\, P_i \mid i \in I \,\}$ eine Familie von Forcing-Halbordnungen. Dann besteht das *Produkt* $P = \prod_{i \in I} P_i$ aus allen Funktionen $p : I \to M$ mit $p(i) \in P_i$ für alle $i \in I$ und $p(i) \neq 1_{P_i}$ für nur endlich viele $i \in I$. P wird durch

$$p \leq q \qquad \text{gdw.} \qquad \forall\, i \in I \;\; p(i) \leq q(i)$$

zu einer Forcing-Halbordnung.
Für $p \in P$ heißt

$$s(p) := \{\, i \in I \mid p(i) \neq 1_{P_i} \,\} \qquad \text{Support von } p.$$

Bemerkung 6. Ist G ein P-generischer Filter über M, so ist für jedes $i \in I$ die Menge $G_i = \{\, p(i) \mid p \in G \,\}$, die Projektion von G auf P_i, ein P_i-generischer Filter.

Eine natürliche Verallgemeinerung von Definition 5 ist

Definition 7. Sei κ eine reguläre Kardinalzahl. Das *κ-Produkt* der Familie $\{\, P_i \mid i \in I \,\}$ von Forcing-Halbordnungen ist die Menge aller Funktionen p auf I mit $< \kappa$-Support, d.h. $|\, s(p) \,| < \kappa$. Die Ordnung ist auch hier komponentenweise definiert.
Es ist üblich für $< \lambda^+$-Support auch λ-Support zu sagen und abzählbarer Support bedeutet $< \aleph_1$-Support.

Lemma 8. Sei $\lambda \in \mathrm{Card}$.
Für λ-abgeschlossene Forcing-Halbordnungen P_1 und P_2 ist auch das Produkt $P_1 \times P_2$ λ-abgeschlossen.
Ist $\kappa \in \mathrm{Card}$ regulär, so hat für $\lambda < \kappa$ und eine Familie von λ-abgeschlossenen Forcing-Halbordnungen $\{\, P_i \mid i \in I \,\}$ das κ-Produkt P auch diese Eigenschaft.

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus der zweiten. Sei also $\alpha \leq \lambda$ und $p^\xi = \langle\, p_i^\xi \mid i \in I \,\rangle$, $\xi < \alpha$, eine absteigende α-Kette in P. Setze $s := \bigcup_{\xi < \alpha} s(p^\xi)$, so ist

$$|\, s \,| \;=\; \left| \bigcup_{\xi < \alpha} s(p^\xi) \right| \;\leq\; \sum_{\xi < \alpha} |\, s(p^\xi) \,| \;<\; \kappa.$$

Alle P_i sind λ-abgeschlossen, womit für jedes $i \in I$ ein $\bar{p}_i \in P_i$ mit $\bar{p}_i \leq p_i^\xi$ für alle $\xi < \alpha$ existiert. Setze $p := \langle\, p_i \mid i \in I \,\rangle$, wobei $p_i := 1_{P_i}$, falls $p_i^\xi = 1_{P_i}$ für alle $\xi < \alpha$ und $p_i := \bar{p}_i$ sonst. Dann ist $p \leq p^\xi$ für alle $\xi < \alpha$ und $s(p) = s$. $\square$

Nun soll es darum gehen, zu untersuchen, wie sich Antiketteneigenschaften auf Produkte übertragen. Um die Problematik genauer zu beleuchten, sei auf den Anhang verwiesen. Dort wird beschrieben, wie man zeigen kann, dass die Übertragung von c.c.c. auf Produkte von ZFC unabhängig ist.

Die folgende Eigenschaft ist stärker als c.c.c.:

Definition 9. Eine Forcing-Halbordnung hat die Eigenschaft (K), wenn jede überabzählbare Menge von Bedingungen eine überabzählbare Teilmenge aus paarweise in P kompatiblen Elementen enthält.

Lemma 10. Sind P_1, P_2 Forcing-Halbordnungen mit der Eigenschaft (K), so auch $P_1 \times P_2$.

Beweis. Sei $W \subseteq P_1 \times P_2$ überabzählbar. Betrachte für $p \in P_1$ und $q \in P_2$

$$W_p = \{\, q \in P_2 \mid (p,q) \in W \,\}, \qquad W_q = \{\, p \in P_1 \mid (p,q) \in W \,\}.$$

Ist für ein $p \in P_1$ das zugehörige W_p überabzählbar, existiert in P_2 eine überabzählbare Teilmenge $X \subseteq W_p$ aus paarweise kompatiblen Elementen. Dann ist $\{\,p\,\} \times X \subseteq W$ auch eine solche.
Analog verfährt man, wenn W_q für ein $q \in P_2$ überabzählbar ist.
Sind für alle $p \in P_1$ und $q \in P_2$ die Mengen W_p und W_q höchstens abzählbar, erhält man wie folgt eine überabzählbare Injektion $F \subseteq W$:
Definiere für $\alpha < \aleph_1$ rekursiv $A_\alpha, p_\alpha, q_\alpha$ und F_α durch

$\alpha = 0$	$A_0 := \mathrm{dom}(W)$, wähle $p_0 \in A_0$ und $q_0 \in W_{p_0}$ und setze $F_0 := \{\,(p_0, q_0)\,\}$;
$\alpha + 1$	$A_{\alpha+1} := A_\alpha \setminus W_{q_\alpha}$, wähle $p_{\alpha+1} \in A_{\alpha+1}$ und $q_{\alpha+1} \in W_{p_{\alpha+1}}$ und setze $F_{\alpha+1} := F_\alpha \cup \{\,(p_{\alpha+1}, q_{\alpha+1})\,\}$;
$\mathrm{Lim}(\alpha)$	$A_\alpha := \bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta$, wähle $p_\alpha \in A_\alpha$ und $q_\alpha \in W_{p_\alpha}$ und setze $F_\alpha := \bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta \cup \{\,(p_\alpha, q_\alpha)\,\}$.

Zeige nun induktiv, dass für alle $\alpha < \aleph_1$ die A_α überabzählbar sind, woraus die Wohldefiniertheit folgt. Weiter gilt $A_\alpha = A_0 \setminus (\bigcup_{\beta<\alpha} W_{q_\beta})$. Außerdem sind die $F_\alpha \subseteq W$ Injektionen und für alle $\beta < \alpha$ ist $F_\beta \subsetneq F_\alpha$.

$\alpha = 0$ $\quad$ W ist überabzählbar, also wegen $W = \bigcup_{p \in \mathrm{dom}(W)} \{p\} \times W_p$ auch $\mathrm{dom}(W)$. Insbesondere existieren p_0 und q_0. Offenbar ist F_0 eine injektive Funktion.

$\alpha + 1$ $\quad$ $A_{\alpha+1} = A_\alpha \setminus W_{q_\alpha}$ ist überabzählbar, da nach Induktionsvoraussetzung A_α diese Eigenschaft hat und W_{q_α} höchstens abzählbar ist. Es sind $p_{\alpha+1}, q_{\alpha+1}$ und $F_{\alpha+1}$ also definiert.
Es ist laut Induktionsvoraussetzung

$$A_{\alpha+1} = A_\alpha \setminus W_{q_\alpha} = (\, A_0 \setminus \bigcup_{\beta < \alpha} W_{q_\beta}\,) \setminus W_{q_\alpha} = A_0 \setminus \bigcup_{\beta < \alpha+1} W_{q_\beta}.$$

Weiterhin ist $F_{\alpha+1} = F_\alpha \cup \{\, (p_{\alpha+1}, q_{\alpha+1}) \,\}$ eine Injektion, da F_α eine solche ist und $p_{\alpha+1} \in A_{\alpha+1} = A_0 \setminus (\, \bigcup_{\beta < \alpha+1} W_{q_\beta}\,)$. Wäre nämlich $p_{\alpha+1} = p_\beta$ oder $q_{\alpha+1} = q_\beta$ für ein $\beta < \alpha + 1$, so $p_{\alpha+1} \in W_{q_\beta} \subseteq \bigcup_{\gamma < \alpha+1} W_{q_\gamma}$, Widerspruch.
Es gilt $F_\beta \subsetneq F_{\alpha+1}$ für alle $\beta < \alpha + 1$ nach Induktionsvoraussetzung und da $F_\alpha \subsetneq F_{\alpha+1}$.

$\mathrm{Lim}(\alpha)$ $\quad$ Es ist nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta = \bigcap_{\beta<\alpha} (\, A_0 \setminus \bigcup_{\gamma<\beta} W_{q_\gamma}\,) \\ &= A_0 \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \bigcup_{\gamma<\beta} W_{q_\gamma} = A_0 \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} W_{q_\beta}. \end{aligned}$$

Da $\alpha < \aleph_1$ und $|W_{q_\beta}| < \aleph_1$ für alle $\beta < \alpha$, ist $\bigcup_{\beta<\alpha} W_{q_\beta}$ höchstens abzählbar und damit A_α überabzählbar.
Für jedes $\beta < \alpha$ ist F_β eine injektive Funktion und da alle F_β kompatibel sind, auch $\bigcup_{\beta<\alpha} F_\beta$. Analog dem Nachfolgerschritt ergibt sich daraus die Injektivität der Funktion F_α.
Aus der Definition ergibt sich unmittelbar $F_\beta \subsetneq F_\alpha$ für alle $\beta < \alpha$.

Setze $\quad F := \bigcup_{\alpha<\aleph_1} F_\alpha$. Dann ist F eine Injektion und wegen $\mathrm{dom}(F) = \{\, p_\alpha \mid \alpha < \aleph_1 \,\}$ überabzählbar.

Da P_1 die Eigenschaft (K) hat, existert $G_1 \subseteq \mathrm{dom}(F)$ überabzählbar aus paarweise kompatiblen Elementen. Damit sind $F{\restriction}_{G_1} = \{\, (p,q) \in F \mid p \in G_1 \,\}$ und auch $\mathrm{rng}(F{\restriction}_{G_1})$ überabzählbar. Weil P_2 die Eigenschaft (K) hat, existiert $G_2 \subseteq \mathrm{rng}(F{\restriction}_{G_1})$ überabzählbar aus paarweise kompatiblen Elementen.

Also ist $\{\, (p,q) \in F \mid q \in G_2 \,\} \subseteq W$ wie gewünscht. $\square$

Theorem 11. Hat für eine Familie $\{\, P_i \mid i \in I \,\}$ von Forcing-Halbordnungen jedes zugehörige P_i die Eigenschaft (K), so auch $P = \prod_{i \in I} P_i$.

Beweis. Sei $X \subseteq P$ überabzählbar. Betrachte

$$W := \{\, s(p) \mid p \in X \,\}.$$

Ist W abzählbar, so gibt es wegen $X = \bigcup_{J \in W} \{\, p \in X \mid s(p) = J \,\}$ ein $J \subseteq I$ endlich mit $s(p) = J$ für überabzählbar viele $p \in X$. Nach Lemma 10 hat $\prod_{i \in J} P_i$ die Eigenschaft (K), womit es eine überabzählbare Teilmenge aus paarweise kompatiblen Elementen von $\{\, p \in X \mid s(p) = J \,\} \subseteq X$ gibt.

Ist W überabzählbar, existieren nach dem Δ-Lemma $Z \subseteq X$ überabzählbar und $J \subseteq I$ endlich, so dass für alle $p, q \in Z$ mit $p \neq q$ gilt $s(p) \cap s(q) = J$.
Betrachte $\bar{Z} := \{\, p{\restriction}_J \mid p \in Z \,\}$.
Ist $\bar{Z}$ überabzählbar, gibt es, weil $\prod_{i \in J} P_i$ die Eigenschaft (K) hat, $\bar{Y} \subseteq \bar{Z}$ überabzählbar aus paarweise kompatiblen Elementen.
Ist $\bar{Z}$ höchstens abzählbar, gibt es wegen $Z = \bigcup_{q \in \bar{Z}} \{\, p \in Z \mid p{\restriction}_J = q \,\}$ ein $q \in \bar{Z}$ und überabzählbar viele $p \in Z$ mit $p{\restriction}_J = q$. Setze $\bar{Y} := \{q\}$.
Dann ist in beiden Fällen $Y := \{\, p \in Z \mid p{\restriction}_J \in \bar{Y} \,\}$ überabzählbar und je zwei Elemente sind kompatibel. $\square$

Korollar 12. Das Produkt abzählbarer Forcing-Halbordnungen hat die Eigenschaft (K), also insbesondere c.c.c.

Theorem 13. Sei $\lambda \in \mathrm{Card}$.

(i) Ist $|P_i| \leq \lambda$ für alle $i \in I$, so hat $\prod_{i \in I} P_i$ die λ^+-Antiketten Eigenschaft.
(ii) Sei κ regulär, $\kappa \leq \lambda$, $\lambda^{<\kappa} = \lambda$ und $|P_i| \leq \lambda$ für alle $i \in I$. Dann hat das κ-Produkt der P_i die λ^+-Antiketten Eigenschaft.
(iii) Ist λ unerreichbar, $\kappa < \lambda$ regulär und $|P_i| < \lambda$ für alle $i \in I$, so hat das κ-Produkt der P_i die λ-Antiketten Eigenschaft.

Beweis. Die Behauptung (i) ist der Spezialfall $\kappa = \aleph_0$ von (ii).
Beweise nun (ii) und (iii). Sei P das κ-Produkt der P_i und W eine Antikette in P. Sind $p = \langle\, p_i \mid i \in I \,\rangle$ und $q = \langle\, q_i \mid i \in I \,\rangle$ inkompatibel in P, so sind für ein $i \in s(p) \cap s(q)$ die zugehörigen p_i und q_i inkompatibel, inbesondere $p_i \neq q_i$.
Im Folgenden betrachten wir die Elemente von W als Funktionen p mit einem Domain $s(p)$, $|\, s(p) \,| < \kappa$, mit Werten in den P_i. Es besteht somit W aus paarweise inkompatiblen Funktionen, woraus wir nun folgern werden, dass $|\, W \,|$ wie gewünscht ist.
Definiere rekursiv $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_\alpha \subseteq \ldots \subseteq I$ und $W_0 \subseteq W_1 \subseteq \ldots \subseteq W_\alpha \subseteq \ldots \subseteq W$ für $\alpha < \kappa$ durch

$\alpha = 0$ $\quad W_0 := \varnothing,\ I_0 := \varnothing.$

$\alpha + 1$ $\quad W_{\alpha+1} := W_\alpha \cup \{\, q_p \mid p \in X_\alpha \,\}$,
wobei $X_\alpha := \{\, p \in P \mid s(p) \subseteq I_\alpha \ \wedge\ \exists\, q \in W\, (\, p = q{\restriction}_{I_\alpha} \,) \,\}$
und $q_p \in W$ gerade ein q mit $p = q{\restriction}_{I_\alpha}$ ist,
$I_{\alpha+1} := \bigcup_{q \in W_{\alpha+1}} s(q)$.

$\mathrm{Lim}(\alpha)$ $\quad W_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} W_\beta,\ I_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} I_\beta.$

Setze $J := \bigcup_{\alpha < \kappa} I_\alpha$ und zeige $W = \bigcup_{\alpha < \kappa} W_\alpha$. Es reicht $W \subseteq \bigcup_{\alpha < \kappa} W_\alpha$ zu zeigen. Sei $q \in W$. Zeige zunächst, dass es ein $\xi < \kappa$ mit $s(q) \cap J = s(q) \cap I_\xi$ gibt. Setze dazu

$\mu := |s(q) \cap J|$ und schreibe $s(q) \cap J$ als $\{\, i_\alpha \mid \alpha < \mu \,\}$. Betrachte nun

$$f : \; s(q) \cap J \longrightarrow \kappa, \qquad i_\alpha \longmapsto \min\{\, \beta \mid i_\alpha \in I_\beta \,\}.$$

Da $|\, f[\, s(q) \cap J\,]\,| \leq \mu < \kappa$ und κ regulär ist, folgt die Beschränktheit von $f[\, s(q) \cap J\,]$ in κ. Deshalb existiert ein $\xi < \kappa$ mit $i_\alpha \in I_\xi$ für alle $\alpha < \mu$, also $s(q) \cap J \subseteq s(q) \cap I_\xi$. Die Gleichheit gilt, weil $I_\xi \subseteq J$.

Setze $p := q{\restriction}_{I_\xi}$, so existiert ein $q_p \in W_{\xi+1}$ mit $p = q_p{\restriction}_{I_\xi}$. Es ist $s(q_p) \subseteq J$, also sind q und q_p kompatibel. Da W eine Antikette ist, ergibt sich $q = q_p \in \bigcup_{\alpha<\kappa} W_\alpha$.

zu (ii). Zeige induktiv für alle $\alpha < \kappa$

$$|W_\alpha| \leq \lambda \quad \text{und} \quad |I_\alpha| \leq \lambda.$$

$\alpha = 0$ $\quad |W_0| = |I_0| = 0 \leq^{(1)} \lambda$.

$\alpha + 1$ $\quad$ Es gilt

$$\begin{aligned} |W_{\alpha+1}| &= |\, W_\alpha \cup \{\, q_p \mid p \in X_\alpha \,\}\,| \\ &\leq |W_\alpha| + |\{\, q_p \mid p \in X_\alpha \,\}| \;\leq\; |W_\alpha| + |X_\alpha|. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} |X_\alpha| &= |\,\{\, p \in P \mid s(p) \subseteq I_\alpha \,\wedge\, \exists q \in W\,(\, p = q{\restriction}_{I_\alpha}\,)\,\}\,| \\ &\leq |\,\{\, p \in P \mid s(p) \subseteq I_\alpha \,\}\,| \\ &= |\bigcup_{\substack{S \subseteq I_\alpha \\ |S| < \kappa}} \{\, p \in P \mid s(p) = S \,\}\,| \\ &\leq^{(2)} \sum_{\substack{S \subseteq I_\alpha \\ |S| < \kappa}} \lambda^{|S|} \;\leq\; \sum_{\substack{S \subseteq I_\alpha \\ |S| < \kappa}} \lambda \\ &= |\,\{\, S \subseteq I_\alpha \mid |S| < \kappa \,\}\,| \cdot \lambda \;\leq\; |\bigcup_{\mu<\kappa} {}^{\mu}I_\alpha| \cdot \lambda \\ &= |I_\alpha|^{<\kappa} \cdot \lambda \;\leq\; \lambda^{<\kappa} \cdot \lambda \;=\; \lambda \end{aligned}$$

und $|\, W_\alpha \,| \leq^{(1)} \lambda$ folgt daraus $|W_{\alpha+1}| \leq^{(1)} \lambda$.

Weiterhin ergibt sich

$$\begin{aligned} |I_{\alpha+1}| &= |\bigcup_{q \in W_{\alpha+1}} s(q)\,| \;\leq\; \sum_{q \in W_{\alpha+1}} |\, s(q)\,| \;\leq\; \sum_{q \in W_{\alpha+1}} \kappa \\ &= |W_{\alpha+1}| \cdot \kappa \;\leq^{(1)}\; \lambda. \end{aligned}$$

$\mathrm{Lim}(\alpha)$ $\quad$ Es ist

$$|W_\alpha| \;=\; |\bigcup_{\beta<\alpha} W_\beta\,| \;\leq\; \sum_{\beta<\alpha} |W_\beta| \;\leq^{(1)}\; \sum_{\beta<\alpha} \lambda \;=\; |\alpha| \cdot \lambda \;=\; \lambda$$

und analog $|I_\alpha| \leq^{(1)} \lambda$.

Aus der Beschränktheit der $|W_\alpha|$ durch λ folgt

$$|W| \;=\; |\bigcup_{\alpha<\kappa} W_\alpha\,| \;\leq^{(1)}\; \sum_{\alpha<\kappa} \lambda \;=\; \kappa \cdot \lambda \;=\; \lambda.$$

zu (iii). Zeige induktiv für alle $\alpha < \kappa$

$$|W_\alpha| < \lambda \quad \text{und} \quad |I_\alpha| < \lambda.$$

Diese Induktion läuft analog der in Fall (ii). Um unter den Voraussetzungen von (iii) die entsprechende (schärfere) Abschätzung zu liefern, wurden im Beweis von (ii) einer neuen Begründung bedürfende Stellen mit Ziffern gekennzeichnet. Im Folgenden sind deren Bedeutungen aufgelistet:

(1) An diesen Stellen kann man offenbar “$\leq$” durch “$<$” ersetzen.

(2) Ab dieser Markierung verläuft die Abschätzung von $|X_\alpha|$ anders.

Dazu benötigen wir, dass für jede unerreichbar Kardinalzahl λ und $\mu, \kappa < \lambda$ gilt $\mu^{<\kappa} < \lambda$.

Beweis. Setze $\nu := \max(\mu, \kappa)$. Ist $f \in \mu^{<\kappa}$, so $f \subseteq \nu \times \nu$. Damit ist $\mu^{<\kappa} \subseteq \wp(\nu \times \nu)$. Da Bijektionen $\wp(\nu \times \nu) \longleftrightarrow \wp(\nu) \longleftrightarrow 2^\nu$ existieren, lässt sich $\mu^{<\kappa}$ injektiv in 2^ν abbilden. Insgesamt erhält man $\mu^{<\kappa} \leq 2^\nu < \lambda$, da $\nu < \lambda$ und λ unerreichbar ist.

Analog dem Beweis von (ii) ergibt sich mit $|I_\alpha| < \lambda$ daraus

$$|\{ S \subseteq I_\alpha \mid |S| < \kappa \}| \leq |\bigcup_{\mu<\kappa} {}^\mu I_\alpha| = |I_\alpha|^{<\kappa} < \lambda.$$

Da λ regulär ist, folgt aus $|P_i| < \lambda$ und $|S| < \lambda$ die Existenz eines $\nu_S \in \mathrm{Card}$, $\nu_S < \lambda$ mit $|P_i| < \nu_S$ für alle $i \in S$. Es gilt

$$|X_\alpha| \leq |\bigcup_{\substack{S \subseteq I_\alpha \\ |S| < \kappa}} \{ p \in P \mid s(p) = S \}| \leq \sum_{\substack{S \subseteq I_\alpha \\ |S| < \kappa}} \nu_S^{|S|} < \lambda,$$

wobei für die letzte Abschätzung $\nu_S^{|S|} < \lambda$ und $|\{ S \subseteq I_\alpha \mid |S| < \kappa \}| < \lambda$ benutzt wird. $\square$

Δ-Systeme

Definition 14. Ein System $\mathcal{Z}$ aus endlichen Mengen heißt Δ-*System*, wenn es eine endliche Menge S gibt, so dass für alle $X_1, X_2 \in \mathcal{Z}$ gilt $X_1 \cap X_2 = S$.

Satz 15 (Δ-Lemma). Sei $\mathcal{W}$ ein System von überabzählbar vielen endlichen Mengen. Dann gibt es ein überabzählbares Δ-System $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{W}$.

Beweis. Da $\mathcal{W} = \bigcup_{n<\omega} \{\, X \in \mathcal{W} \mid \; |X| = n \,\}$, existiert ein $n < \omega$ mit $|X| = n$ für überabzählbar viele $X \in \mathcal{W}$. Ohne Einschränkung kann also $|X| = n$ für alle $X \in \mathcal{W}$ angenommen werden.
Zeige die Behauptung durch Induktion über n:

$n = 1$ Setze $S := \varnothing$, so ist für $\{x_1\}, \{x_2\} \in \mathcal{Z} := \mathcal{W}$ mit $\{x_1\} \neq \{x_2\}$ deren Durchschnitt gleich S.

$n + 1$ Wenn ein a zu überabzählbar vielen $X \in \mathcal{W}$ gehört, ist

$$\mathcal{Y} := \{\, X \setminus \{a\} \mid \; X \in \mathcal{W} \,\wedge\, a \in X \,\}$$

überabzählbar und $|Y| = n$ für alle $Y \in \mathcal{Y}$. Es gibt somit $\bar{\mathcal{Z}} \subseteq \mathcal{Y}$ und S endlich mit $Y_1 \cap Y_2 = S$ für beliebige $Y_1, Y_2 \in \bar{\mathcal{Z}}$.
Für $X_1, X_2 \in \mathcal{Z} := \{\, Y \cup \{a\} \mid Y \in \bar{\mathcal{Z}} \,\}$ ist $X_1 \cap X_2 = S \cup \{a\}$, also $\mathcal{Z}$ wie gewünscht.
Ist andererseits für jedes a die Menge $\{\, X \in \mathcal{W} \mid a \in X \,\}$ höchstens abzählbar, wähle für $\alpha < \aleph_1$ rekursiv $X_\alpha \in \mathcal{W}$ durch

$$\begin{aligned}
X_\alpha &\in \{\, X \in \mathcal{W} \mid \; \forall \beta < \alpha \;\; X_\beta \cap X = \varnothing \,\} \\
&= \bigcap_{\beta<\alpha} \{\, X \in \mathcal{W} \mid \; \forall a \in X_\beta \;\; a \notin X \,\} \\
&= \bigcap_{\beta<\alpha} \bigcap_{a \in X_\beta} \{\, X \in \mathcal{W} \mid \; a \notin X \,\} \\
&= \mathcal{W} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} \bigcup_{a \in X_\beta} \{\, X \in \mathcal{W} \mid \; a \in X \,\}.
\end{aligned}$$

Letzteres ist nicht leer, weil $\bigcup_{\beta<\alpha} \bigcup_{a \in X_\beta} \{\, X \in \mathcal{W} \mid a \in X \,\}$ höchstens abzählbar ist. Setze also $S := \varnothing$ und $\mathcal{Z} := \{\, X_\alpha \mid \alpha < \aleph_1 \,\}$. □

Invarianz von c.c.c. unter Produkt-Bildung

Es werden nun die Resultate aufgelistet, die die Unabhängigkeit der Übertragung von c.c.c. auf Produkte beweisen. Auf Beweise wird hier leider verzichtet.

Zur Konsistenz von ZFC + ¬ “c.c.c. überträgt sich auf Produkte”.

DEFINITION 16. Ein *Baum* ist eine partiell geordnete Menge $(T, <)$, so dass für jedes $x \in T$ die Menge $\{ y \mid y < x \}$ durch $<$ wohlgeordnet wird.
Der *α-te Level* von T besteht aus allen $x \in T$ mit $o(x) := \mathrm{otp}\{ y \mid y < x \} = \alpha$.
Die *Höhe* von T ist definiert durch $\mathrm{height}(T) = \sup\{ o(x) + 1 \mid x \in T \}$.
Ein *Zweig* in T ist eine maximale linear geordnete Teilmenge von T. Die *Länge* eines Zweiges ist dessen Ordnungstyp. Ein *α-Zweig* ist ein Zweig der Länge α.
Eine *Antikette* in T ist eine Teilmenge A von T, so dass je zwei verschiedene Elemente aus A nicht vergleichbar sind.

DEFINITION 17. Ein Baum $(T, <)$ heißt *Suslin-Baum*, wenn

(1) $\mathrm{height}(T) = \omega_1$,
(2) jeder Zweig von T ist höchstens abzählbar,
(3) jede Antikette in T ist höchstens abzählbar.

LEMMA 18. Es gilt

$$\mathsf{Con}(\text{ ZFC }) \quad \longrightarrow \quad \mathsf{Con}(\text{ ZFC } + \exists \text{ Suslin-Baum }).$$

DEFINITION 19. Sei α eine Ordinalzahl, $\alpha \leq \omega_1$. Ein *normaler α-Baum* ist ein Baum T mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathrm{height}(T) = \alpha$,
(2) T hat einen eindeutig bestimmten kleinsten Punkt (die Wurzel),
(3) jeder Level ist höchstens abzählbar,
(4) ist x nicht maximal in T, so gibt es unendlich viele $y > x$ auf dem nächsten Level (unmittelbare Nachfolger),
(5) für jedes $x \in T$ gibt es ein $y > x$ auf jedem höheren Level unter dem α-ten,
(6) ist $\beta < \alpha$ eine Limesordinalzahl, x, y beide im β-ten Level und $\{ z \mid z < x \} = \{ z \mid z < y \}$, so $x = y$.

Lemma 20. Gibt es einen Suslin-Baum, so auch einen normalen Suslin-Baum.

Gibt es einen normalen Suslin-Baum, ist dieser mit der umgekehrten Ordnungsrelation eine Forcing-Halbordnung P, die c.c.c. hat. Jedoch geht diese Eigenschaft beim Übergang zu $P \times P$ verloren.
Aus den vorhergehenden Lemmata lässt sich damit folgern:

Theorem 21. Es gilt

$$\mathsf{Con}(\text{ ZFC }) \quad \longrightarrow \quad \mathsf{Con}(\text{ ZFC } + \neg \text{ “c.c.c. überträgt sich auf Produkte” }).$$

Zur Konsistenz von ZFC + “c.c.c. überträgt sich auf Produkte”.

Die folgenden Definitionen und Lemmata gehören zum Vortrag über Forcing-Axiome und Martin's Axiom. Um allgemeine Ergebnisse nicht vorwegzunehmen, werden an dieser Stelle nur ganz spezielle Resultate genannt.

Definition 22. Man bezeichnet mit $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ folgende Aussage:
Sei P eine Forcing-Halbordnung, die c.c.c. hat und sei $\mathcal{D}$ ein System von höchstens $\aleph_1$ vielen dichten Teilmengen von P. Dann gibt es einen Filter G auf P, so dass für alle $D \in \mathcal{D}$ gilt $D \cap G \neq \varnothing$.

Lemma 23. Es gilt

$$\mathsf{Con}(\text{ ZFC }) \quad \longrightarrow \quad \mathsf{Con}(\text{ ZFC } + \mathrm{MA}_{\aleph_1}).$$

Lemma 24. Sei P eine Forcing-Halbordnung. Aus $\mathrm{MA}_{\aleph_1}$ folgt

$$P \text{ hat c.c.c.} \quad \longleftrightarrow \quad P \text{ hat die Eigenschaft (K).}$$

Mit Theorem 11 liefert dies

Theorem 25. Es gilt

$$\mathsf{Con}(\text{ ZFC }) \quad \longrightarrow \quad \mathsf{Con}(\text{ ZFC } + \text{ “c.c.c. überträgt sich auf Produkte” }).$$

Insgesamt ist nun die Unabhängigkeit der Übertragung von c.c.c. auf Produkte von ZFC gezeigt.