

Übungen zur Mengenlehre I

33. (a) Zeigen Sie: Eine Menge M ist genau dann extensional, wenn $(M, \in \cap M^2)$ Modell des Extensionalitätsaxioms ist.

(b) Kann es eine Formel φ geben, so dass $(M, \in \cap M^2) \models \varphi$ genau dann gilt, wenn M transitiv ist?

34. (a) Sei α eine Limeszahl. Zeigen Sie: V_α ist ein Modell des Extensionalitäts-, Paarmengen-, Vereinigungsmengen-, Potenzmengen- und Fundierungsaxioms.

(b) Sei φ eine Instanz des Aussonderungsschemas. Sei $\dot{\varphi}$ die entsprechende Formel als Menge. Zeigen Sie: $V_\alpha \models \dot{\varphi}$.

(c) Können Sie eine Menge angeben, die genau die $\dot{\varphi}$ aus Teilaufgabe (b) enthält?

35. Sei $(M, \epsilon) \models \mathbf{ZF}$. Sei $F : M \rightarrow M$ eine Bijektion, so dass eine Formel φ und $x_1, \dots, x_n$ mit $F = \{x \in M \mid (M, \epsilon) \models \varphi(x, x_1, \dots, x_n)\}$ existieren. Definiere $x\epsilon'y$ durch $x\epsilon F(y)$ für alle $x, y \in M$.

Zeigen Sie: $(M, \epsilon') \models (\mathbf{Ext}), (\mathbf{Paar}), (\bigcup - \mathbf{Ax}), (\mathbf{Pot})$.

36. Fortsetzung von Aufgabe 35

Zeigen Sie:

(a) $(M, \epsilon') \models (\mathbf{Ers})$

(b) $(M, \epsilon') \models (\mathbf{Inf})$

(c) Man kann F so wählen, dass $(M, \epsilon') \models \neg(\mathbf{Fund})$.

Die Aufgaben 35 und 36 zeigen die relative Konsistenz von $\neg(\mathbf{Fund})$ mit $\mathbf{ZF} - (\mathbf{Fund})$.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 08. 01. 07 in der Vorlesung