

Übungen zur Mengenlehre I

21. (a) Zeigen Sie: $\omega \times \omega \sim \omega$.
(b) Betrachten Sie die Mengen $\{f \mid f : \omega \rightarrow 2\}$, $\{f : \omega \rightarrow \omega \mid f \text{ bijektiv}\}$, $\mathfrak{P}(\omega)$ und $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$. Zeigen Sie, dass diese gleichmächtig sind.
22. Zeigen Sie, dass für alle Kardinalzahlen κ, λ, μ Folgendes gilt:
(a) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$
(b) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$
(c) $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$, falls $\kappa \leq \lambda$
(d) $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$, falls $0 < \lambda \leq \mu$.
23. Beweisen Sie:
(a) $\prod_{0 < n < \omega} n = 2^{\aleph_0}$
(b) $\prod_{n < \omega} \aleph_n = \aleph_\omega^{\aleph_0}$.
24. Sei $[\mu]^\kappa$ die Menge aller Teilmengen von μ der Kardinalität κ . Eine Teilmenge $C \subseteq [\mu]^\kappa$ heißt konfinal in $[\mu]^\kappa$, wenn für alle $x \in [\mu]^\kappa$ ein $y \in C$ mit $x \subseteq y$ existiert. Zeigen Sie für alle unendlichen Kardinalzahlen $\kappa \leq \mu$:
Ist C konfinal in $[\mu]^\kappa$, so ist $\text{card}([\mu]^\kappa) = \text{card}(C) \cdot 2^\kappa$.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 04. 12. 06 in der Vorlesung