Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 06/07
13. 11. 06
Blatt 4

Übungen zur Mengenlehre I

13. Rekursion für stark fundierte Relationen:

Seien A, R und G Klassen, sei R stark fundiert auf A und $G : V \to V$. Dabei heißt R stark fundiert, wenn es fundiert ist und $\forall x\ \{y \mid yRx\} \in V$ erfüllt.

Zeigen Sie: Es gibt eine Klasse $F : A \to V$, die

$$\forall x \in A\ F(x) = G(\{(z, F(z)) \mid zRx\})$$

erfüllt.

14. Zeigen Sie: Sei $(P, <)$ eine dichte, unbeschränkte, strikt linear geordnete Menge. Dann gibt es eine vollständige, unbeschränkte, strikt linear geordnete Menge $(C, <^*)$, so dass $P \subseteq C$, $<$ und $<^*$ auf P übereinstimmen und P dicht in C ist.

Zur Erinnerung: Eine strikt lineare Ordnung $(P, <)$ heißt dicht, wenn für alle $a < b$ ein c mit $a < c < b$ existiert. Ein $D \subseteq P$ heißt dicht in P, wenn für alle $a < b$ in P ein $d \in D$ mit $a < d < b$ existiert. $(P, <)$ heißt unbeschränkt, wenn es weder ein kleinstes noch ein größtes Element hat. Und $(P, <)$ heißt vollständig, wenn jede nicht leere, beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt.

15. Zeigen Sie: Sind $D_0, D_1, \ldots, D_n, \ldots$ $(n \in \omega)$ dichte, offene Teilmengen von $\mathbb{R}$, dann ist auch der Durchschnitt $D = \bigcap\{D_n \mid n \in \omega\}$ dicht in $\mathbb{R}$.

16. Es gelte **ZFC** − (**Fund**).

(a) Wie muss man dann On definieren, so dass weiterhin Induktion und Rekursion möglich sind?

(b) Folgern Sie aus $V = \bigcup\{V_\alpha \mid \alpha \in On\}$ das Fundierungsschema.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 20. 11. 06 in der Vorlesung