Mathematisches Institut der Universität Bonn, SS 2006

Seminar zur Nichtstandardanalysis und Anwendungen

Vortrag 8: Martingale

Julia Schrotz, Melanie Lülsdorff, René Frings

19. und 26. Juni 2006

In diesem Vortrag soll gezeigt werden, dass ein λ^2-Martingal genau dann S-stetig ist, wenn seine quadratische Variation es ist. Zum Beweis dieses Satzes werden im Wesentlichen die Doobsche Maximalungleichung sowie zwei weitere Lemmata benötigt, die wir im folgenden vorstellen und beweisen werden. Wir halten uns dabei stark an die Ausführungen in S. Albeverio et al. [1].

Sei im folgenden stets $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein hyperendlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_\xi\}$ mit $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\xi = 1$ eine hyperendliche Zeitachse. Zuerst einige

Definitionen:

- Eine interne Abbildung $X : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ heißt *interner Prozess*, kurz $(X_t)_{t\in T}$. Für ein festes $\omega \in \Omega$ heißt die Abbildung $t \longmapsto X_t(\omega)$ *Pfad* des internen Prozesses X.

  Für $0 \le i \le \xi - 1$ und $\omega \in \Omega$ bezeichnen wir mit

  $$\Delta X_{t_i}(\omega) := X_{t_{i+1}}(\omega) - X_{t_i}(\omega)$$

  die *internen Zuwächse* von X. Mit $s = t_i$ und $t = t_j$ schreiben wir abkürzend

  $$\sum_{r=s}^{t} X_r(\omega) := \sum_{k=i}^{j-1} X_{t_k}(\omega) = X_{t_i}(\omega) + X_{t_{i+1}}(\omega) + \ldots + X_{t_{j-1}}(\omega).$$

  (Damit ist $X_t(\omega)$ also nicht in der Summe enthalten.)

- Eine *interne Filtration* auf Ω ist ein Tupel $\big(\Omega, (\mathscr{A}_t)_{t\in T}, \mathbb{P}\big)$, wobei $(\mathscr{A}_t)_{t\in T}$ eine monoton wachsende interne Folge interner Algebren auf Ω ist. (Da wir stets für $\mathscr{A}$ die interne Potenzmenge von Ω nehmen, sind die $\mathscr{A}_t$ automatisch Unteralgebren von $\mathscr{A}$.)

- Ein interner Prozess $(X_t)_{t\in T}$ heißt *-*adaptiert* bezüglich der Filtration $\big(\Omega, (\mathscr{A}_t)_{t\in T}, \mathbb{P}\big)$, falls X_t für alle $t \in T$ $\mathscr{A}_t$-messbar ist.

- Ein interner Prozess $(M_t)_{t\in T}$ heißt *Martingal* bzgl. der Filtration $\big(\Omega, (\mathscr{A}_t)_{t\in T}, \mathbb{P}\big)$, falls gilt

  (i) M ist *-adaptiert

  (ii) Für alle $s, t \in T$ mit $s < t$ und alle $A \in \mathscr{A}_s$ ist $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(M_t - M_s)) = 0$.

  Ersetzen wir das Gleichheitszeichen durch „$\ge$“ bzw. „$\le$“, so heißt M *Submartingal* bzw. *Supermartingal*.

- Sei $X : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ ein interner Prozess. Der Prozess $[X] : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ definiert durch

  $$[X](\omega, t) = \sum_{s=0}^{t} \Delta X_s(\omega)^2$$

  heißt *quadratische Variation* von X.

- Ein Martingal $M : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ heißt λ^2-*Martingal*, falls ${}^\circ\mathbb{E}\big(M_t^2\big) < \infty$ für alle $t \in T$.

- Eine interne Abbildung $\tau : \Omega \longrightarrow T$ heißt *interne Stoppzeit*, falls $\{\omega \mid \tau(\omega) \leq t\} \in \mathscr{A}_t$ für alle $t \in T$.

  Für eine interne Stoppzeit τ und ein Martingal M wird der *gestoppte Prozess* M_τ definiert durch
$$(M_\tau)_t(\omega) := M_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega).$$

- Ein Martingal M heißt *lokales* λ^2 *-Martingal*, falls eine monoton wachsende Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ interner Stoppzeiten existiert, sodass gilt:
  (i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist der gestoppte Prozess $M_t\tau_n$ ein λ^2-Martingal.
  (ii) Für fast alle $\omega \in \Omega$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\tau_n(\omega) = 1$.

- Für zwei gegebene interne Prozesse $X, Y : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ ist das *stochastische Integral* definiert durch
$$\int_0^t X\,dY := \sum_{s=0}^{t} X_s\,\Delta Y_s.$$

- Ein interner Prozess $X : \Omega \times T$ heißt *S-stetig*, falls fast alle seine Pfade S-stetig sind..

Definition: Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim_t$ auf Ω durch
$$\omega \sim_t \tilde{\omega} :\Longleftrightarrow \forall A \in \mathscr{A}_t(\omega \in A \Leftrightarrow \tilde{\omega} \in A).$$

Die zugehörige Äquivalenzklasse ist dann also
$$[\omega]_t = \bigcap\{A \in \mathscr{A}_t \,|\, \omega \in A\}.$$

Ein Martingal und eine interne Stoppzeit lassen sich mit Hilfe dieser Äquivalenzrelation wie folgt charakterisieren:

Proposition:

(a) Sei M ein Martingal. Die beiden definierenden Eigenschaften (i) und (ii) eines Martingals können umformuliert werden zu
  (i') $\forall t \in T\ \forall \omega, \tilde{\omega} \in \Omega\big(\omega \sim_t \tilde{\omega} \Rightarrow M_t(\omega) = M_t(\tilde{\omega})\big)$.
  (ii') $\forall t \in T\ \forall \omega \in \Omega \sum_{\tilde{\omega}\in[\omega]_t} \Delta M_t(\tilde{\omega})\,\mathbb{P}(\{\tilde{\omega}\}) = 0$.

(b) $\tau : \Omega \longrightarrow T$ ist interne Stoppzeit $\Longleftrightarrow$ $\forall \omega \in \Omega\big(\tau(\omega) = t \Rightarrow \forall \tilde{\omega} \in [\omega]_t : \tau(\tilde{\omega}) = t\big)$.

Beweis:

(a) „(i) $\Rightarrow$ (i')“: Sei $t \in T$. Da M *-adapiert ist, ist $M_t^{-1}(I) \in \mathscr{A}_t$ für alle Intervalle $I \subset {}^*\mathbb{R}$, also insbesondere
$$\forall x \in {}^*\mathbb{R} : M_t^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}_t.$$

Seien $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$ mit $\omega \sim_t \tilde{\omega}$ und sei $x := M_t(\omega) \in {}^*\mathbb{R}$. Dann
$$\begin{aligned} M_t^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}_t \quad &\Longrightarrow \quad \big(\omega \in M_t^{-1}(\{x\}) \Longleftrightarrow \tilde{\omega} \in M_t^{-1}(\{x\})\big) \\ &\Longrightarrow \quad \big(M_t(\omega) = x \Longleftrightarrow M_t(\tilde{\omega}) = x\big) \\ &\Longrightarrow \quad M_t(\omega) = M_t(\tilde{\omega}). \end{aligned}$$

Also ist M_t auf allen Äquivalenzklassen $[\omega]_t$ konstant für alle $t \in T$.

„(i') ⇒ (i)": Sei $t \in T$ und M_t sei konstant auf allen $[\omega]_t$. Sei $I \subset {}^*\mathbb{R}$ ein Intervall.

Da Ω hyperendlich ist, ist $I \cap M(\Omega) = \{x_1, \dots, x_K\}$ mit $K \in {}^*\mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_K \in {}^*\mathbb{R}$, also

$$M_t^{-1}(I) = M_t^{-1}\big(I \cap M(\Omega)\big) = M_t^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{K}\{x_i\}\right) = \bigcup_{i=1}^{K} M_t^{-1}(\{x_i\})$$

Da M_t auf den Äquivalenzklassen konstant ist, ist jedes der $M_t^{-1}(\{x_i\})$ Vereinigung von endlich vielen Äquivalenzklassen, also ist auch $M_t^{-1}(I)$ endliche Vereinigung von Äquivalenzklassen. Da die Äquivalenzklassen in $\mathscr{A}_t$ liegen, ist auch $M_t^{-1}(I) \in \mathscr{A}_t$. Also ist $(M_t)_{t\in T}$ *-adaptiert.

„(ii) ⇒ (ii')": Sei $s_i \in T$ und $\omega \in \Omega$. Da $[\omega]_{s_i} \in \mathscr{A}_{s_i}$ und $s_{i+1} > s_i$, gilt aufgrund der Martingaleigenschaft, dass

$$\sum_{\tilde\omega \in [\omega]_{s_i}} \Delta M_{s_i}(\tilde\omega)\mathbb{P}(\{\tilde\omega\}) = 0.$$

„(ii') ⇒ (ii)": Sei $A \in \mathscr{A}_s$ und seien $s, t \in T$ mit $s < t$. Es gilt:

$$\sum_{\tilde\omega \in A}\big(M_t(\tilde\omega) - M_s(\tilde\omega)\big)\,\mathbb{P}(\{\tilde\omega\}) = \sum_{\tilde\omega\in A}\left(\sum_{r=s}^{t}\Delta M_r(\tilde\omega)\right)\mathbb{P}(\{\tilde\omega\}) = \sum_{r=s}^{t}\sum_{\tilde\omega\in A}\Delta M_r(\tilde\omega)\,\mathbb{P}(\{\tilde\omega\}).$$

Da $(\mathscr{A}_t)_{t\in T}$ eine aufsteigende Folge interner Algebren ist, gilt $A \in \mathscr{A}_r$ für alle $r \in [s,t]$. O. B. d. A. sei $A \neq \varnothing$. Für jedes $r \in [s,t]$ lässt sich A dann disjunkt in Äquivalenzklassen zerlegen, d. h. $A = \dot\bigcup_j [\omega_j]_r$. Es ergibt sich also:

$$\sum_{\tilde\omega\in A}\big(M_t(\tilde\omega) - M_s(\tilde\omega)\big)\,\mathbb{P}(\{\tilde\omega\}) = \sum_{r=s}^{t}\sum_{j}\sum_{\tilde\omega\in[\omega_j]_r}\Delta M_r(\tilde\omega)\,\mathbb{P}(\{\tilde\omega\}) = 0,$$

wobei wir im letzten Schritt die Voraussetzung verwendet haben.

(b)

$$\begin{aligned}
\tau \text{ ist Stoppzeit} &\iff \forall t \in T : \{\tau \le t\} \in \mathscr{A}_t \iff \forall t \in T : \{\tau = t\} \in \mathscr{A}_t \\
&\iff \forall t \in T : \mathbb{1}_{\{\tau = t\}} \text{ ist } \mathscr{A}_t\text{-messbar} \\
&\iff \forall \omega, \tilde\omega \in \Omega\big(\omega \sim_t \tilde\omega \Rightarrow \mathbb{1}_{\{\tau=t\}}(\omega) = \mathbb{1}_{\{\tau=t\}}(\tilde\omega)\big) \\
&\iff \forall \omega \in \Omega\big(\tau(\omega) = t \Rightarrow \forall \tilde\omega \in [\omega]_t : \tau(\tilde\omega) = t\big).
\end{aligned}$$

□

Corollar: Sei $X : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ *-adaptiert und $M : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ ein Martingal. Dann ist auch $\int X\,dM$ ein Martingal.

Beweis: Sei $t \in T$. Da X *-adaptiert ist, ist X auf den Äquivalenzklassen $[\omega]_t$ konstant. Daher

$$\sum_{\tilde\omega\in[\omega]_t}\Delta\left(\int_0^t X\,dM\right)(\tilde\omega)\,\mathbb{P}(\{\tilde\omega\}) = X_t(\omega)\sum_{\tilde\omega\in[\omega]_t}\Delta M_t(\tilde\omega)\,\mathbb{P}(\{\tilde\omega\}) = 0,$$

weil M ein Martingal ist. □

Lemma (Doobsche Maximalungleichung):
Sei $(M_t)_{t\in T}$ ein positives Submartingal und $p \in {}^*\mathbb{R}$ mit $p > 1$. Dann gilt für alle $t \in T$:

$$\mathbb{E}(\sup_{s\le t} M_s^p) \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}(M_t^p)$$

Beweis: Wir führen den Beweis in zwei Schritten:

(i) Sei $x \in {}^*\mathbb{R}_+$. Wir definieren eine Stoppzeit $\tau : \Omega \longrightarrow T$ durch

$$\tau(\omega) := \inf\{s \in T \,|\, M_s(\omega) > x\} \wedge 2.$$

Sei $t \in T$. Da $t < 2$, ist $\{\sup_{s\le t} M_s > x\} = \{\tau \le t\}$. Es folgt dann für alle $t \in T$:

$$\begin{aligned} x\mathbb{P}(\sup_{s\le t} M_s > x) &= x\mathbb{P}(\tau \le t) = \int_{\{\tau\le t\}} x\,d\mathbb{P} \le \int_{\{\tau\le t\}} M_\tau\,d\mathbb{P} = \int_{\{\tau\le t\}} M_{\tau\wedge t}\,d\mathbb{P} \\ &= \int_{\{\tau\le t\}} (M_{\tau\wedge t} - M_t)\,d\mathbb{P} + \int_{\{\tau\le t\}} M_t\,d\mathbb{P} \\ &= \int_\Omega (M_{\tau\wedge t} - M_t)\,d\mathbb{P} + \int_{\{\tau\le t\}} M_t\,d\mathbb{P} \le \int_{\{\tau\le t\}} M_t\,d\mathbb{P} \\ &= \int_{\{\sup_{s\le t} M_s > x\}} M_t\,d\mathbb{P}, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt benutzt haben, dass M ein Submartingal ist.

(ii) Sei $p > 1$. Setze $F := \sup_{s\le t} M_s$ und bezeichne mit μ das Bildmaß von $\mathbb{P}$ unter F. Wir können annehmen, dass alle auftretenden Momente existieren. (Für $\mathbb{E}(M_t^p) = \infty$ ist die Aussage nämlich trivialerweise richtig.) Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(F^p) &= \int_0^\infty y^p\,d\mu(y) = \int_0^\infty \left(\int_0^y p\,x^{p-1}\,dx\right) d\mu(y) = \int_0^\infty \left(\int_x^\infty p\,x^{p-1}\,d\mu(y)\right) dx \\ &= \int_0^\infty p\,x^{p-1}\,\mu(y > x)\,dx = \int_0^\infty p\,x^{p-1}\mathbb{P}(F > x)\,dx \\ &\overset{\text{(i)}}{\le} \int_0^\infty p\,x^{p-2}\left(\int_{\{F>x\}} M_t\,d\mathbb{P}\right) dx = \int_\Omega \left(\int_0^{f(\omega)} p\,x^{p-2}\,dx\right) M_t(\omega)\,d\mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \frac{p}{p-1}\mathbb{E}(F^{p-1}M_t) \le \frac{p}{p-1}\,\mathbb{E}(F^p)^{(p-1)/p}\,\mathbb{E}(M_t^p)^{1/p}, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die HÖLDER-Ungleichung mit $\frac{p-1}{p}$ und p angewendet haben. Daraus folgt

$$\mathbb{E}(f^p)^{1/p} \le \frac{p}{p-1}\,\mathbb{E}(M_t^p)^{1/p}$$

und indem wir die Terme auf beiden Seiten zur p-ten Potenz nehmen, auch die Behauptung.

□

Proposition: Sei $X : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ ein hyperendlicher Prozess. Dann ist

$$[X](t) = X(t)^2 - X(0)^2 - 2\int_0^t X\,dX.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\Delta[X](t_i) &= \big(X(t_{i+1}) - X(t_i)\big)^2 \\
&= X(t_{i+1})^2 - 2X(t_i)X(t_{i+1}) + X(t_i)^2 \\
&= X(t_{i+1})^2 - X(t_i)^2 - 2X(t_i)\big(X(t_{i+1}) - X(t_i)\big) \\
&= X(t_{i+1})^2 - X(t_i)^2 - 2\int_{t_i}^{t_{i+1}} X\,dX.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, wenn wir über alle $t_i < t$ summieren. □

Corollar: Sei $M : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ ein Martingal. Dann ist

$$\mathbb{E}\big(M_t^2\big) = \mathbb{E}\big(M_0^2 + [M](t)\big).$$

Beweis: Aus obiger Proposition folgt

$$\mathbb{E}\big(M_t^2\big) = \mathbb{E}\big(M_0^2 + [M](t)\big) + 2\,\mathbb{E}\left(\int_0^t M\,dM\right) = \mathbb{E}\big(M_0^2 + [M](t)\big),$$

weil $\int M\,dM$ ein Martingal ist, das bei 0 beginnt, und deshalb Erwartungswert Null hat. □

Lemma 1: Sei $M : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ ein Martingal mit $M_0 = 0$. Dann gibt es Konstanten $C, K \in \mathbb{R}_+$ mit

$$C \cdot \mathbb{E}\big(\max_{s\le t} M_s^4\big) \le \mathbb{E}\big([M]_t^2\big) \le K \cdot \mathbb{E}\big(\max_{s\le t} M_s^4\big).$$

Beweis:

(i) Linke Ungleichung:

Mit der Doobschen Ungleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\max_{s\le t} M_s^4\big) &= \left(\frac{4}{3}\right)^4 \mathbb{E}\big(M_t^4\big) \\
&\overset{\substack{M(0)=0\\ \downarrow}}{=} \left(\frac{4}{3}\right)^4 \mathbb{E}\left(\sum_{s=0}^{t} \Big(\big(M_s + \Delta M_s\big)^4 - M_s^4\Big)\right) \\
&= \left(\frac{4}{3}\right)^4 \mathbb{E}\left(\sum_{s=0}^{t} \big(4M_s^3\Delta M_s + 6M_s^2\Delta M_s^2 + 4M_s\Delta M_s^3 + \Delta M_s^4\big)\right).
\end{aligned}$$

Da $\mathbb{E}\big(M_s^3\Delta M_s\big) = 0$ und $\left|\Delta M_s\right| \le 2\max_{r\le t}\left|M_r\right|$, folgt daraus:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(\max_{s\le t} M_s^4\big) &\le \left(\frac{4}{3}\right)^4 \mathbb{E}\big(6\max_{s\le t} M_s^2[M](t) + 8\max_{s\le t} M_s^2[M](t) \\
&\quad +4\max_{s\le t} M_s^2[M](t)\big) \\
&= 18\left(\frac{4}{3}\right)^4 \mathbb{E}\big(\max_{s\le t} M_s^2[M](t)\big) \\
&\overset{\substack{\text{H?der}\\ \downarrow}}{\le} 18\left(\frac{4}{3}\right)^4 \mathbb{E}\big(\max_{s\le t} M_s^4\big)^{1/2}\,\mathbb{E}\big([M](t)^2\big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Wenn wir nun noch durch $\mathbb{E}\big(\max_{s\le t} M_s^4\big)^{1/2}$ dividieren und $C := \left(18\left(\frac{4}{3}\right)^4\right)^{-2}$ setzen, erhalten wird die linke Ungleichung.

(ii) Rechte Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big([M](t)^2\big) &\overset{\text{Lemma 1}}{\overset{\downarrow}{=}} \mathbb{E}\left(\Big(M_t^2 - \underbrace{M_0^2}_{=0} - 2\int_0^t M\,dM\Big)^2\right) \\
&= \mathbb{E}\left(M_t^4 - 4M_t^2\int_0^t M\,dM + 4\Big(\int_0^t M\,dM\Big)^2\right) \\
&\overset{\text{H?der}}{\overset{\downarrow}{\leq}} \mathbb{E}\big(M_t^4\big) + 4\,\mathbb{E}\big(M_t^4\big)^{1/2}\,\mathbb{E}\left(\Big(\int_0^t M\,dM\Big)^2\right)^{1/2} + 4\,\mathbb{E}\left(\Big(\int_0^t M\,dM\Big)^2\right) \\
&\leq \mathbb{E}\big(\max_{s\leq t} M_s^4\big) + 4\,\mathbb{E}\big(\max_{s\leq t} M_s^4\big)^{1/2}\,\mathbb{E}\left(\Big(\int_0^t M\,dM\Big)^2\right)^{1/2} \\
&\quad + 4\,\mathbb{E}\left(\Big(\int_0^t M\,dM\Big)^2\right).
\end{aligned}
$$

Da $\int M\,dM$ ein Martingal ist, gilt mit der Bemerkung zu Lemma 1 und wegen $M(0) = 0$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\Big(\int_0^t M\,dM\Big)^2\right) &= \left(\Big[\int M\,dM\Big](t)\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_0^t M^2\Delta M^2\right) \\
&\leq \mathbb{E}\big(\max_{s\leq t} M_s^2[M](t)\big) \\
&\overset{\text{H?der}}{\overset{\downarrow}{\leq}} \mathbb{E}\big(\max_{s\leq t} M_s^4\big)^{1/2}\,\mathbb{E}\big([M](t)^2\big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Wir setzen dies oben ein und erhalten

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big([M](t)^2\big) &\leq \mathbb{E}\big(\max_{s\leq t} M_s^4\big) + 4\,\mathbb{E}\big(\max_{s\leq t} M_s^4\big)^{3/4}\,\mathbb{E}\big([M](t)^2\big)^{1/4} \\
&\quad + 4\,\mathbb{E}\big(\max_{s\leq t} M_s^4\big)^{1/2}\,\mathbb{E}\big([M](t)^2\big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Wie wir in (i) gezeigt haben, ist $\mathbb{E}\big(\max_{s\leq t} M_s^4\big) \leq \frac{1}{C}\,\mathbb{E}\big([M](t)^2\big)$. Daher

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big([M](t)^2\big) &\leq \frac{1}{C^{1/2}}\,\mathbb{E}\big(\max_{s\leq t} M_s^4\big)^{1/2}\,\mathbb{E}\big([M](t)^2\big)^{1/2} \\
&\quad + \frac{4}{C^{1/4}}\,\mathbb{E}\big(\max_{s\leq t} M_s^4\big)^{1/2}\,\mathbb{E}\big([M](t)^2\big)^{1/2} \\
&\quad + 4\,\mathbb{E}\big(\max_{s\leq t} M_s^4\big)^{1/2}\,\mathbb{E}\big([M](t)^2\big)^{1/2} \\
&= \left(\frac{1}{C^{1/2}} + \frac{4}{C^{1/4}} + 4\right)\mathbb{E}\big(\max_{s\leq t} M_s^4\big)^{1/2}\,\mathbb{E}\big([M](t)^2\big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Wenn wir noch durch $\mathbb{E}\big([M](t)^2\big)^{1/2}$ dividieren und $K := \big(\frac{1}{C^{1/2}} + \frac{4}{C^{1/4}} + 4\big)^2$ setzen, haben wir die auch die rechte Ungleichung bewiesen und damit das Lemma.

□

Lemma 2: Sei M ein λ^2-Martingal, sodass die Menge

$$\{\omega \in \Omega \mid \exists t \in T : \Delta M_t(\omega) \not\approx 0\}$$

LOEB-Maß Null hat. Dann gibt es ein λ^2-Martingal $\tilde{M}$ mit *infinitesimalen Zuwächsen* (d. h. $\Delta\tilde{M}_t(\omega) \approx 0$ für alle $\omega \in \Omega, t \in T$), sodass auf einer Menge vom LOEB-Maß Eins für alle $t \in T$ gilt:

$$\tilde{M}_t \approx M_t \quad \text{und} \quad [\tilde{M}](t) \approx [M](t).$$

Beweis: Für $n \in {}^*\mathbb{N}$ setze

$$\Omega_n = \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \exists t \in T : |\Delta M_t(\omega)| > \frac{1}{n}\right\}.$$

Sei $A := \{n \in {}^*\mathbb{N} \,|\, P(\Omega_n) < 1/k\}$. A ist intern und $\mathbb{N} \subset A$, also existiert nach Overspill-Prinzip ein $N \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ mit $N \in A$. Setze

$$t_\omega := \min\{t \in T : |\Delta M_t(\omega)| > 1/K\} \wedge 1.$$

(t_ω ist i. A. keine Stoppzeit, denn ΔM_t ist zwar $\mathscr{A}_t$-messbar, i. A. jedoch nicht $\mathscr{A}_{t+\Delta t}$-messbar.) Wie eben bezeichne $[\omega]_t$ die Äquivalenzklasse von ω unter der Äquivalenzrelation $\sim_t$. Sei

$$[\omega]_t^+ = \{\tilde{\omega} \in [\omega]_t \,|\, t_{\tilde{\omega}} \le t\}.$$

Wir definieren nun einen neuen Prozess X durch $X_0 := M_0$ und

$$\Delta X_t(\omega) := \begin{cases} \Delta M_t(\omega), & \text{falls } t < t_\omega, \\ 0 & \text{falls } t \ge t_\omega. \end{cases}$$

sowie einen Prozess Y durch $Y_0 = 0$ und

$$\Delta Y_t(\omega)\mathbb{P}([\omega]_t) = \int_{[\omega]_t^+} \Delta M_t d\mathbb{P}.$$

- $\bar{M} := X + Y$ ein Martingal, denn

$$\begin{aligned} \int_{[\omega]_t} \Delta\bar{M}_t \, d\mathbb{P} &= \int_{[\omega]_t} \Delta X_t \, d\mathbb{P} + \int_{[\omega]_t} \Delta Y_t \, d\mathbb{P} \\ &= \int_{[\omega]_t \setminus [\omega]_t^+} \Delta M_t \, d\mathbb{P} + \sum_{\tilde{\omega} \in [\omega]_t} \frac{1}{\mathbb{P}([\tilde{\omega}]_t)} \sum_{\omega' \in [\tilde{\omega}]_t^+} \Delta M_t(\omega')\mathbb{P}(\omega')\mathbb{P}(\{\tilde{\omega}\}) \\ &= \int_{[\omega]_t \setminus [\omega]_t^+} \Delta M_t \, d\mathbb{P} + \int_{[\omega]_t^+} \Delta M_t \, d\mathbb{P} = 0 \end{aligned}$$

- Für alle $\omega \in \Omega$ und $t \in T$ ist

$$\int_{[\omega]_t^+} \Delta M_t \, d\mathbb{P} = \int_{[\omega]_{t_\omega}} \Delta M_t \, d\mathbb{P},$$

  denn wegen $\{\omega \in \Omega \mid t_\omega < t\} \in \mathscr{A}_t$ folgt für alle $s, t \in T$ mit $s < t$, dass $\{\omega \in \Omega \mid t_\omega = s\} \in \mathscr{A}_t$. Dann ist auch $[\omega]_t \cap \{\omega \in \Omega \mid t_\omega = s\} \in \mathscr{A}_t$ und wegen der Martingaleigenschaft gilt daher

$$\begin{aligned} \int_{[\omega]_t} \Delta M_t \, d\mathbb{P} &= \int_{[\omega]_t \cap \{\omega \in \Omega \,|\, t_\omega \le t\}} \Delta M_t \, d\mathbb{P} \\ &= \int_{[\omega]_t \cap \{\omega \in \Omega \,|\, t_\omega = t\}} \Delta M_t \, d\mathbb{P} + \sum_{s=0}^{t} \underbrace{\int_{[\omega]_t \cap \{\omega \in \Omega \,|\, t_\omega = s\}} \Delta M_t \, d\mathbb{P}}_{=0} \\ &= \int_{[\omega]_{t_\omega}} \Delta M_t \, d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

- Für fast alle $\omega \in \Omega$ ist $\sum_{t=0}^{1} |\Delta Y_t(\omega)| \approx 0$, denn

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{1} |\Delta Y_t(\omega)|\right) &= \sum_{\omega\in\Omega}\sum_{t=0}^{1}\left|\sum_{\tilde\omega\in[\omega]_t^+} \frac{\Delta M_t(\tilde\omega)\mathbb{P}(\{\tilde\omega\})}{\mathbb{P}([\omega]_t)}\right| \mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&\le \sum_{\omega\in\Omega}\sum_{t=0}^{1}\sum_{\tilde\omega\in[\omega]_t^+} \frac{|\Delta M_t(\tilde\omega)|\mathbb{P}(\{\tilde\omega\})}{\mathbb{P}([\omega]_t)} \mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \sum_{\tilde\omega\in\Omega_N}\sum_{\omega\in[\tilde\omega]_{t_{\tilde\omega}}} \frac{|\Delta M_{t_{\tilde\omega}}(\tilde\omega)|\mathbb{P}(\{\tilde\omega\})}{\mathbb{P}([\omega]_{t_{\tilde\omega}})} \mathbb{P}(\{\omega\}) \\
&= \int_{\Omega_N} |\Delta M_{t_{\tilde\omega}}|\, d\mathbb{P} \\
&\le 2\int_{\Omega_N} \max_{t\le 1} |M_t|\, d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

  Nun ist

$$\left({}^{\circ}\mathbb{E}\left(\max_{t\le1}|M_t|\right)\right)^2 \le {}^{\circ}\mathbb{E}\left(\left(\max_{t\le1}|M_t|\right)^2\right) \overset{\text{Doob}}{\le} 4\cdot{}^{\circ}\mathbb{E}(M_1^2) \overset{\text{Vor.}}{<} \infty,$$

  d. h. $\max_{t\le1}|M_t|$ ist S-integrierbar. Da nach Konstruktion $\mathbb{P}(\Omega_N) \le \frac{1}{N} \approx 0$, ist also auch obiges Integral infinitesimal.

- Auf derjenigen Teilmenge von $\Omega \setminus \Omega_N$, auf der $\sum |\Delta Y_s|$ infinitesimal ist, gilt für alle $t \in T$, dass $\bar{M}_t \approx M_t$, denn

$$|\bar{M}_t - M_t| = |Y_t| = \left|\sum_{s=0}^{t} \Delta Y_s\right| \le \sum_{s=0}^{1} |\Delta Y_s| \approx 0.$$

- Für alle $t \in T$ und fast alle $\omega \in \Omega$ ist $[\bar{M}](t) \approx [M](t)$, denn

$$\left|[\bar{M}](t)-[M](t)\right| = \left|\sum_{s=0}^{t}\left((\Delta X_s + \Delta Y_s)^2 - \Delta M_s^2\right)\right| = \left|\sum_{s=0}^{t}(2\Delta M_s + \Delta Y_s)\Delta Y_s\right| \le C\cdot\sum_{s=0}^{1}|\Delta Y_s| \approx 0.$$

- $\bar{M}$ ein λ^2-Martingal, denn für alle $t \in T$ gilt:

$${}^{\circ}\mathbb{E}(\bar{M}_t^2) = {}^{\circ}\mathbb{E}(\bar{M}_0^2) + {}^{\circ}\mathbb{E}([\bar{M}](t)) = {}^{\circ}\mathbb{E}(M_0^2) + {}^{\circ}\mathbb{E}([M](t)) = {}^{\circ}\mathbb{E}(M_t^2) < \infty.$$

- $\bar{M}$ hat nicht notwendigerweise infinitesimale Zuwächse, denn ΔY könnte nichtinfinitesimal sein. Wir beheben dieses Problem wie folgt: Nach dem Overspill-Prinzip enthält die Menge

$$\left\{n \in {}^*\mathbb{N} \,\middle|\, \mathbb{P}\left(\left\{\omega\in\Omega \mid \exists t<1 : |\Delta Y_t| > \frac{1}{n}\right\}\right) < \frac{1}{n}\right\}$$

  ein Element $\gamma \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Wir definieren nun $\tau : \Omega \longrightarrow T$ durch

$$\tau(\omega) := \min\left\{t \in T \,\middle|\, |\Delta Y_t(\omega)| > \frac{1}{\gamma}\right\} \wedge 1.$$

  Da $\Delta Y_t(\omega)$ nur von $[\omega]_t$ abhängt, ist τ eine Stoppzeit. Da $\tau = 1$ fast überall, erfüllt der gestoppte Prozess $\tilde{M} := \bar{M}_\tau$ das Lemma.

□

Wir verfügen nun über alle technischen Hilfsmittel, um den zentralen Satz dieses Vortrags zu formulieren und zu beweisen:

Satz: Ein lokales λ^2-Martingal ist genau dann S-stetig, wenn seine quadratische Variation S-stetig ist.

Beweis: O. B. d. A. können wir uns auf den Fall von λ^2-Martingalen beschränken. Mit Lemma 2 genügt es außerdem, die Aussage nur für Martingale mit infinitesimalen Zuwächsen zu zeigen. Unter Verwendung von internen Stoppzeiten

$$\tau_n(\omega) = \min\left\{t \in T \,\middle|\, |M_t(\omega)| \geq n \vee [M](\omega, t) \geqq n\right\}$$

können wir ferner annehmen, dass M und $[M]$ S-beschränkt sind.

„$\Leftarrow$“: Sei $[M]$ S-stetig. Definiere für jedes Paar $(m,n) \in {}^*\mathbb{N} \times {}^*\mathbb{N}$ eine Untermenge $A_{m,n}$ von Ω durch

$$A_{m,n} = \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \exists i \in {}^*\mathbb{N} : \sup_{(\overline{i}/n) \leqq s \leqq (\overline{i+1}/n)} \left(M_s - M_{\frac{\overline{i}}{n}}\right)^4 \geq \frac{1}{m}\right\},$$

wobei $\overline{r}$ das kleinste Element in T bezeichne, das größer oder gleich r ist. Um zu zeigen, dass M S-stetig ist, müssen wir zeigen, dass die Menge $A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{m,n}$ LOEB-Maß Null hat. Unter Verwendung des Underspill-Prinzips genügt es zu zeigen, dass $P(A_{m,\gamma}) \approx 0$ für alle $m \in \mathbb{N}, \gamma \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
0 \;\leq\; & P(A_{m,\gamma}) \leq \sum_{i<\gamma} P\left\{\omega \,\middle|\, \sup_{(\overline{i}/\gamma) \leq s \leq (\overline{i+1}/\gamma)} \left(M_s - M_{\frac{\overline{i}}{\gamma}}\right)^4 \geq \frac{1}{m}\right\} \\
\leq\; & m \sum_{i<\gamma} \mathbb{E}\Big(\sup_{(\overline{i}/\gamma) \leq s \leq (\overline{i+1}/\gamma)} \left(M_s - M_{\frac{\overline{i}}{\gamma}}\right)^4 \Big) \\
\leq\; & \frac{m}{C} \sum_{i<\gamma} \mathbb{E}\left(\left([M]\left(\overline{\frac{i+1}{\gamma}}\right) - [M]\left(\overline{\frac{i}{\gamma}}\right)\right)^2\right),
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt Lemma 1 angewendet worden ist. Weil die quadratische Variation S-stetig und endlich ist, dürfen Summe und Erwartungswert vertauscht werden. Dann ist wegen

$$\sum_{i<\gamma}\left(\left([M]\left(\overline{\frac{i+1}{\gamma}}\right) - [M]\left(\overline{\frac{i}{\gamma}}\right)\right)^2\right) \leq \max_{i<\gamma}\left([M]\left(\overline{\frac{i+1}{\gamma}}\right) - [M]\left(\overline{\frac{i}{\gamma}}\right)\right) \cdot ([M](1) - [M](0)) \approx 0,$$

auch der Erwartungswert infinitesimal, und somit ebenfalls $P(A_{m,\gamma})$.

„$\Rightarrow$“: Sei M S-stetig. Wir definieren

$$B_{m,n} = \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \exists i \in {}^*\mathbb{N} : \left([M]\left(\overline{\frac{i+1}{n}}\right) - [M]\left(\overline{\frac{i}{n}}\right)\right)^2 \geq \frac{1}{m}\right\}.$$

Wie oben genügt es zu zeigen, dass $P(B_{m,\gamma}) \approx 0$ für alle m $\in \mathbb{N}$ und $\gamma \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$.

Wähle $\gamma \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ fest und sei N die Einschränkung von M auf die gröbere Zeitachse $S = \{\overline{i}/\gamma \mid i \leq \gamma\}$. Wir können annehmen, dass $[N]$ S-beschränkt ist, denn durch Verwendung von Stoppzeiten kann man annehmen, dass $[M]$ S-beschränkt ist und $[N] \leq [M]$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
0 \quad &\leq \quad P(B_{m,\gamma}) \leq \sum_{i<\gamma} P\left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \left([M]\left(\frac{\overline{i+1}}{\gamma}\right) - [M]\left(\frac{\bar{i}}{\gamma}\right)\right)^2 > \frac{1}{m}\right\} \\
&\leq \quad m \sum_{i<\gamma} \mathbb{E}\left(\left([M]\left(\frac{\overline{i+1}}{\gamma}\right) - [M]\left(\frac{\bar{i}}{\gamma}\right)\right)^2\right) \\
&\overset{\substack{\text{Lemma 1}\\ \downarrow}}{\leq} \quad mK \sum_{i<\gamma} \mathbb{E}\left(\max_{(\bar{i}/\gamma)\leqq s\leqq(\overline{i+1}/\gamma)} \left(M_s - M_{\frac{\bar{i}}{\gamma}}\right)^4\right) \\
&\overset{\substack{\text{Doob}\\ \downarrow}}{\leq} \quad mK \left(\frac{4}{3}\right)^4 \sum_{i<\gamma} \mathbb{E}\left(\left(M_{\frac{\overline{i+1}}{\gamma}} - M_{\frac{\bar{i}}{\gamma}}\right)^4\right) \\
&\leq \quad mK \left(\frac{4}{3}\right)^4 \mathbb{E}\left(\max_{i<\gamma}\left(\left(M_{\frac{\overline{i+1}}{\gamma}} - M_{\frac{\bar{i}}{\gamma}}\right)^2\right)[N](1)\right),
\end{aligned}
$$

was infinitesimal ist, weil $[N]$ S-beschränkt und M S-stetig ist.

□

Literatur

[1] S. Albeverio, J. Fenstad, R. Høegh-Kroh, T. Lindstrøm: *Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics*, Pure and applied mathematics 122, Academic Press, Orlando (FL) 1986, bes. S. 115–130.

[2] D. Landers, L. Rogge: *Nichstandard Analysis: mit 204 Übungsaufgaben*, Springer-Verlag, Berlin 1994.

[3] T. Lindstrøm: *Hyperfinite stochastic integration I: The nonstandard theory*, in: Mathematica Scandinavica 46, Kopenhagen 1980, S. 265–292.