Seminar zur Nichtstandardanalysis und Anwendungen

Vortrag 8: Martingale

Julia Schrotz, Melanie Lülsdorff, René Frings
19. und 26. Juni 2006

Erinnerung: Eine hyperendliche Menge $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_\xi\}$ mit $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\xi = 1$ heißt *hyperendliche Zeitachse*, falls $t_{i+1} - t_i \approx 0$ für alle $0 \le i \le \xi - 1$.

Definitionen: Sei T eine hyperendliche Zeitachse und $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ein hyperendlicher Wahrscheinlichkeitsraum.

- Eine interne Abbildung $X : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ heißt *interner Prozess*, kurz $(X_t)_{t\in T}$.

  Für $0 \le i \le \xi - 1$ und $\omega \in \Omega$ bezeichnen wir mit

  $$\Delta X_{t_i}(\omega) := X_{t_{i+1}}(\omega) - X_{t_i}(\omega)$$

  die *internen Zuwächse* von X. Mit $s = t_i$ und $t = t_j$ schreiben wir abkürzend

  $$\sum_{r=s}^{t} X_r(\omega) := \sum_{k=i}^{j-1} X_{t_k}(\omega) = X_{t_i}(\omega) + X_{t_{i+1}}(\omega) + \ldots + X_{t_{j-1}}(\omega).$$

  (Damit ist $X_t(\omega)$ also nicht in der Summe enthalten.)

- Eine *interne Filtration* auf Ω ist ein Tupel $\big(\Omega, (\mathscr{A}_t)_{t\in T}, \mathbb{P}\big)$, wobei $(\mathscr{A}_t)_{t\in T}$ eine monoton wachsende interne Folge interner Algebren auf Ω ist. (Da wir stets für $\mathscr{A}$ die interne Potenzmenge von Ω nehmen, sind die $\mathscr{A}_t$ automatisch Unteralgebren von $\mathscr{A}$.)

- Ein interner Prozess $(X_t)_{t\in T}$ heißt **-adaptiert* bezüglich der Filtration $\big(\Omega, (\mathscr{A}_t)_{t\in T}, \mathbb{P}\big)$, falls X_t für alle $t \in T$ $\mathscr{A}_t$-messbar ist.

- Ein interner Prozess $(M_t)_{t\in T}$ heißt *Martingal* bzgl. der Filtration $\big(\Omega, (\mathscr{A}_t)_{t\in T}, \mathbb{P}\big)$, falls gilt

  (i) M ist *-adaptiert.

  (ii) Für alle $s, t \in T$ mit $s < t$ und alle $A \in \mathscr{A}_s$ ist $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A(M_t - M_s)) = 0$.

  Ersetzen wir das Gleichheitszeichen durch „$\ge$“ bzw. „$\le$“, so heißt M *Submartingal* bzw. *Supermartingal*.

- Sei $X : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ ein interner Prozess. Der Prozess $[X] : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ definiert durch

  $$[X](\omega, t) = \sum_{s=0}^{t} \Delta X_s(\omega)^2$$

  heißt *quadratische Variation* von X.

- Ein Martingal $M : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ heißt *λ^2-Martingal*, falls ${}^\circ\mathbb{E}\big(M_t^2\big) < \infty$ für alle $t \in T$.

- Eine interne Abbildung $\tau : \Omega \longrightarrow T$ heißt *interne Stoppzeit*, falls $\{\omega \mid \tau(\omega) \le t\} \in \mathscr{A}_t$ für alle $t \in T$.

  Für eine Stoppzeit τ und ein Martingal M wird der *gestoppte Prozess* M_τ definiert durch

  $$(M_\tau)_t(\omega) := M_{t\wedge\tau(\omega)}(\omega).$$

- Ein Martingal M heißt *lokales λ^2-Martingal*, falls eine monoton wachsende Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ interner Stoppzeiten existiert, sodass gilt:
  (i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist der gestoppte Prozess M_{τ_n} ein λ^2-Martingal.
  (ii) Für fast alle $\omega \in \Omega$ gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $\tau_n(\omega) = 1$.
- Für zwei gegebene interne Prozesse $X, Y : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ ist das *stochastische Integral* definiert durch
$$\int_0^t X\, dY := \sum_{s=0}^{t} X_s\, \Delta Y_s.$$
- Ein interner Prozess $(X_t)_{t\in T}$ heißt *S-stetig*, falls fast alle seine Pfade S-stetig sind.

Mit diesen Definitionen können wir nun den zentralen Satz dieses Vortrags formulieren:

Satz: Ein lokales λ^2-Martingal ist genau dann S-stetig, wenn seine quadratische Variation S-stetig ist.

Zum Beweis des Satzes benötigen wir einige Lemmata:

Lemma (Doobsche Ungleichung): Sei $X : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ ein positives Submartingal. Dann gilt für alle $p > 1$ und $t \in T$:
$$\mathbb{E}\big(\sup_{s\le t} X_s^p\big) \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}\big(X_t^p\big).$$

Lemma 1: Sei $M : \Omega \times T \longrightarrow {}^*\mathbb{R}$ ein Martingal mit $M_0 = 0$. Dann gibt es Konstanten $C, K \in \mathbb{R}_+$ mit
$$C \cdot \mathbb{E}\big(\max_{s\le t} M_s^4\big) \le \mathbb{E}\big([M](t)^2\big) \le K \cdot \mathbb{E}\big(\max_{s\le t} M_s^4\big).$$

Lemma 2: Sei M ein λ^2-Martingal, sodass die Menge
$$\{\omega \in \Omega \mid \exists t \in T : \Delta M_t(\omega) \not\approx 0\}$$
Loeb-Maß Null hat. Dann gibt es ein λ^2-Martingal $\tilde{M}$ mit *infinitesimalen Zuwächsen* (d. h. $\Delta\tilde{M}_t(\omega) \approx 0$ für alle $\omega \in \Omega, t \in T$), sodass auf einer Menge vom Loeb-Maß Eins für alle $t \in T$ gilt:
$$\tilde{M}_t \approx M_t \quad \text{und} \quad [\tilde{M}](t) \approx [M](t).$$