19.04.06

# 3. Konstruktion von Nichtstandard-Modellen (Teil I)

Matthieu Felsinger

## 1 Filter und Ultrafilter

**Definition 1.1.** Sei $I \neq \emptyset$ fest vorgegeben. Ein System $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(I)$ heißt Filter (über $I$), falls gilt:

(i) $\mathcal{F} \neq \emptyset$ und $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(ii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

(iii) $A \in \mathcal{F}, A \subset B \subset I \Rightarrow B \in \mathcal{F}$

Ein Filter $\mathcal{F}$, zu dem es keinen echten Oberfilter gibt (d.h. für den gilt: $\mathcal{G}$ Filter und $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{G}$ ), heißt Ultrafilter.

**Bemerkung 1.2.** Sei $I$ eine unendliche Menge. Dann ist

$$\mathcal{F} := \{A \subset I \ : \ I - A \text{ endlich}\}$$

ein Filter über I, genannt Filter der koendlichen Teilmengen von I.

**Satz 1.3** (Existenz von Ultrafiltern).
*Zu jedem Filter über $I$ existiert ein diesen Filter umfassender Ultrafilter über $I$.*

**Bemerkung 1.4.** Sei $\mathcal{F}$ ein Filter über I. Dann gilt für $A \subset I$:

$$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F} \text{ und } A_1 \cap \ldots \cap A_n \subset A \Rightarrow A \in \mathcal{F}$$

**Bemerkung 1.5** (Eigenschaften von Ultrafiltern). Sei $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter über $I$. Dann gilt:

(i) für alle $A \subset I$ ist $A \in \mathcal{F}$ oder $I - A \in \mathcal{F}$.

(ii) für $A_1, \ldots, A_n \subset I : A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $A_k \in \mathcal{F}$

## 2 Vorbereitungen für die Abbildung $^* : V(S) \to V(W)$

**Beispiel 2.1** (Konstruktion eines Systems $^*\mathbb{R}$). Wählt man $I = \mathbb{N}$ und für $\mathcal{F}$ einen Ultrafilter, der die koendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ umfasst, kann man ein $^*\mathbb{R}$ über folgende Äquivalenzrelation erhalten:
Für $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiere:

$$\alpha \sim \beta :\Leftrightarrow \{i \in \mathbb{N} : \ \alpha(i) = \beta(i)\} \in \mathcal{F}$$

Sei weiter $r_{\mathbb{N}}(i) := r$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und setze

$$\overline{\alpha} := \begin{cases} r, & \text{falls } \alpha \sim r_{\mathbb{N}} \text{ für ein } r \in \mathbb{R} \text{ ist} \\ \left\{\overline{\beta} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} :\ \beta \sim \alpha\right\} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow \quad \text{ein System } {}^*\mathbb{R} = \left\{\overline{\alpha} :\ \alpha \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right\}$$

---

Von nun an sei $\mathcal{F}$ ein fest gewählter Ultrafilter über der Menge $I$.
Seien $f, g$ Abbildungen von der Menge $I$ in die Standard-Welt $V(S)$ (kurz: $f, g \in V(S)^I$).
Dann schreiben wir

$$f(i) = g(i) \text{ f.ü., falls } \{i \in I :\ f(i) = g(i)\} \in \mathcal{F}$$

und $f(i) \neq g(i)$ f.ü. analog. Desweiteren schreiben wir auch

$$f(i) \in g(i) \text{ f.ü., falls } \{i \in I :\ f(i) \in g(i)\} \in \mathcal{F}$$

und $f(i) \notin g(i)$ f.ü. analog.

**Definition 2.2.**
*Erinnerung:* $V_0(S) := S$, $V_n(S) := V_{n-1}(S) \cup \mathcal{P}(V_{n-1})$

Setze für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$Z_n := \left\{f \in V(S)^I :\ f(i) \in V_n(S) \text{ f.ü.}\right\} \text{ und ferner } Z_\infty := \bigcup_{n=0}^{\infty} Z_n$$

**Bemerkung 2.3.**

(i) Für jedes $f \in Z_\infty - Z_0$ gibt es genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$f \in Z_n - Z_{n-1}$$

Dann ist $f(i) \in V_n(S) - V_{n-1}(S)$ f.ü. und daher ist $f(i) \notin S$ f.ü.

(ii) Ist $f \in Z_n - Z_0$ und $k \in V(S)^I$, so gilt:

$$k(i) \in f(i) \text{ f.ü.} \ \Rightarrow k \in Z_{n-1}$$

Nun führen wir analog zur Konstruktion von ${}^*\mathbb{R}$ durch Äquivalenzklassen auch hier folgende Äquivalenzrelation ein: Sei $f \in Z_0$, dann setzen wir

$$\overline{f} := \begin{cases} s & \text{, falls } f(i) = s \text{ f.ü. für ein } s \in S \text{ ist} \\ \{k \in Z_0 :\ k(i) = f(i) \text{ f.ü. }\} & \text{, sonst} \end{cases} \tag{1}$$

Dann folgt:

$$\overline{f} = \overline{g} \Leftrightarrow f(i) = g(i) \text{ f.ü.} \tag{2}$$

Wir wollen, dass die gesuchte Menge $W$ Grundlage der Superstruktur $V(W)$ wird. Deshalb darf $W$ nur Urelemente enthalten und **keine** Mengen. Also ersetzen wir alle Elemente in W, die keine Urelemente sind, durch Urelemente $\widetilde{f} \notin S$. Falls $\overline{f} \in S$, so setzen wir $\widetilde{f} := \overline{f}$. Also gilt:

$$\overline{f} \in S \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{f} \in S \tag{3}$$

$$\overline{f} = \overline{g} \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{f} = \widetilde{g} \tag{4}$$

**Bemerkung 2.4.** Mit obigen Festsetzungen gilt für die Menge $W := \left\{\widetilde{f} : \; f \in Z_0\right\}$ und $f, g \in Z_0$, $s \in S$:

(i) $\widetilde{f} = s \Leftrightarrow f(i) = s$ f.ü.

(ii) $\widetilde{f} = \widetilde{g} \Leftrightarrow f(i) = g(i)$ f.ü.

(iii) $S \subset W$

**Definition 2.5** (Induktive Definition von $\widetilde{f}$ für $f \in Z_\infty$)**.**
Es sei $n \in \mathbb{N}$, und es sei $\widetilde{f}$ für $f \in Z_{n-1}$ schon definiert. Setze für $f \in Z_n - Z_{n-1}$

$$\widetilde{f} := \left\{\widetilde{k} : \; k \in Z_{n-1} \text{ und } k(i) \in f(i) \text{ f.ü.}\right\}$$

Aus 2.4 und 2.5 erhält man sofort folgende Beziehungen:

- $f \in Z_0 \Leftrightarrow \widetilde{f}$ Urelement $\Leftrightarrow \widetilde{f} \in W$.
- $f \notin Z_0 \Leftrightarrow \widetilde{f}$ Menge $\Leftrightarrow \widetilde{f} \notin W$.

**Lemma 2.6.**
*Für $f, g \in Z_\infty$ gilt:*

*(i)* $f \notin Z_0 \Rightarrow \widetilde{f} = \left\{\widetilde{k} : \; k \in Z_\infty \textit{ und } k(i) \in f(i) \textit{ f.ü.}\right\}$

*(ii)* $\widetilde{f} = \widetilde{g} \Leftrightarrow f(i) = g(i)$ *f.ü.*

*(iii)* $\widetilde{g} \in \widetilde{f} \Leftrightarrow g(i) \in f(i)$ *f.ü.*