10.04.06

Einfache Nonstandard-Analysis reellwertiger Funktionen

Marcus Rang

Im folgenden wollen wir eine Funktion ${}^*f$ finden, die eine gegebene reellwertige Funktion f in ${}^*\mathbb{R}$ geeignet fortsetzt. Da f in der Superstruktur von $\mathbb{R}$ enthalten ist, gilt:

$$\begin{array}{lcll} V(\mathbb{R}) & \models & f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}. & \text{mit Transferprinzip folgt:} \\ V({}^*\mathbb{R}) & \models & {}^*f : {}^*\mathbb{R} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}, & \text{d.h. } {}^*f \text{ setzt } f \text{ in geeigneter Weise fort.} \end{array}$$

Insbesondere gilt für $x, y \in \mathbb{R}$: ${}^*f(x) = f(x) = y$.

Bemerkung Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Dann gilt:

(i) ${}^*(f + g) = {}^*f + {}^*g$

(ii) ${}^*(g \circ f) = {}^*g \circ {}^*f$

Im folgenden werden Stetigkeit und Differenzierbarkeit reellwertiger Funktionen mittels Nichtstandard-Kriterien charakterisiert!

Satz 1 (Nichtstandard-Kriterium für Stetigkeit)

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig in x_0.

(ii) $\forall x \in {}^*\mathbb{R} : x \approx x_0 \Rightarrow {}^*f(x) \approx {}^*f(x_0)$

Korollar 1 Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die in x_0 stetig sind.
Dann sind auch $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ stetig in x_0.

Korollar 2 Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in x_0 stetig und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ stetig.
Dann ist $g \circ f$ in x_0 stetig.

Satz 2 (Nichtstandard-Kriterium für gleichmäßige Stetigkeit)

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

(i) f ist gleichmäßig stetig.

(ii) $\forall x, y \in {}^*\mathbb{R} : x \approx y \Rightarrow f(x) \approx f(y)$

Satz 3 (Nichtstandard-Kriterium für Differenzierbarkeit)

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$. Sei $c \in \mathbb{R}$, dann sind äquivalent:

(i) f ist in x_0 differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0) = c$.

(ii) $\forall x \in {}^*\mathbb{R} : x \approx x_0, x \neq x_0 \Rightarrow \frac{{}^*f(x) - {}^*f(x_0)}{x - x_0} \approx c$

Bemerkung (ii) $\Leftrightarrow \frac{{}^*f(x_0+dx) - {}^*f(x_0)}{dx} \approx c$ für alle $0 \neq dx \approx 0$.
$\rightarrow$ Die Ableitung einer Funktion f in x_0 ergibt sich somit als Quotient zweier <u>infinitesimaler</u> Größen:
Des Zuwachses ${}^*f(x_0 + dx) -{}^* f(x_0)$ und der infinitesimalen Veränderung dx.