Superstrukturen/Nichtstandardeinbettung

Im folgenden betrachtet man die Sprache $\mathcal{L} = \{\in\}$. Diese Sprache reicht aus, um beliebige Mengenbeziehungen zu formulieren.

Definition 0.1 (Superstruktur). *Sei $S \neq \emptyset$ (Ur-)Menge von Elementen, die keine Mengen sind. Sei $V_0(S) := S$, $V_{\nu+1}(S) := V_\nu(S) \cup \mathcal{P}(V_\nu(S))$. Dann heißt $V(S)$, definiert durch*

$$V(S) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_\nu(S)$$

Superstruktur *von S.*

Es zeigt sich, dass Teilmengen und Potenzmengen von S, Relationen, Funktionen und Funktionenmengen in der Superstruktur enthalten sind.

Bemerkung 0.2. *Mit den Sprachen erster Stufe war es nicht möglich, die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ zu formulieren. Da Relationen und Teilmengen in der Superstruktur enthalten sind, gilt für die Supremumseigenschaft $(V(\mathbb{R}), \in) \models \varphi$, wobei*

$$\varphi \;=\; \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})[(\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in A\ (y \leq x)) \;\Rightarrow\; (\exists z : (\forall z^{'} \in A\ z^{'} \leq z) \wedge (\forall z^{'} < z\ \exists x \in A : z^{'} < x)]$$

Definition 0.3. *Sei gegeben Abbildung $*:\ V(\mathbb{R}) \longrightarrow V({}^*\mathbb{R})$, sowie Element $X \in V({}^*\mathbb{R})$.*

- *Falls $X = {}^*Y$ für ein $Y \in V(\mathbb{R})$, so ist X ein* Standardelement*.*
- *Falls $X \in {}^*Y$ für ein $Y \in V(\mathbb{R})$, so ist X ein* internes Element*.*
- *Falls $X \notin {}^*Y$ für alle $Y \in V(\mathbb{R})$, so ist X ein* externes Element*.*

Definition 0.4 (*Formeln). *Sei $\theta(x)$ Formel in $\mathcal{L}_{V(\mathbb{R})}$. Dann bezeichne ${}^*\theta(x)$ die Formel in $\mathcal{L}_{V({}^*\mathbb{R})}$, die aus θ durch Ersetzen aller Symbole $a \in V(\mathbb{R})$ durch ${}^*a$ hervorgeht.*

Definition 0.5 (Nichtstandardeinbettung). *Eine Abbildung $*:\ V(\mathbb{R}) \longrightarrow V({}^*\mathbb{R})$ heißt* Nichtstandardeinbettung *oder* Hypererweiterung*, falls sie folgende Bedingungen erfüllt:*

- ***Erweiterungsprinzip**: ${}^*r = r\ \forall r \in \mathbb{R}$, sowie $\mathbb{R} \subsetneq {}^*\mathbb{R}$.*
- ***Transferprinzip**: Für alle beschränkten Sätze θ in $\mathcal{L}_{V(\mathbb{R})}$ gilt $(V(\mathbb{R}), \in) \models \theta$ g.d.w. $(V({}^*\mathbb{R}), \in) \models {}^*\theta$*
- *ω_1**-Saturierung**: Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Familie von internen Mengen, die die endliche Schnitteigenschaft erfüllt. Dann $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \neq \emptyset$*

Theorem 0.6. *Sei $\emptyset \neq X \in V(\mathbb{R})$. Dann gilt $(X,\ +,\ \cdot,\ \leq,\ 0,\ 1)$ angeordneter Körper mit 0 und $1 \Rightarrow ({}^*X,\ {}^*+,\ {}^*\cdot,\ {}^*\leq,\ {}^*0,\ {}^*1)$ angeordneter Körper mit ^{*0} und ^{*1}.*

Definition 0.7 (Nichtstandardwelt). *Die Menge ${}^*V(\mathbb{R}) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} {}^*V_n(\mathbb{R})$ heißt* Nichtstandardwelt *oder* Hyperuniversum.

Bemerkung 0.8.

1. *Die Nichtstandardwelt ist die Menge aller internen Elemente, d.h. es gilt auch ${}^*V(\mathbb{R}) = \bigcup_{X\in\ V(\mathbb{R})-\mathbb{R}} {}^*X$.*
2. *Jede Standardmenge ist intern.*
3. *Es gilt ${}^*V(\mathbb{R}) \subsetneq V({}^*\mathbb{R})$, z.B. ist ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ extern.*
4. *Die internen Mengen bilden eine Algebra.*

Theorem 0.9 (Internes Definitionsprinzip). *Seien $X, Y_1, \ldots, Y_n$ intern und $\theta(x, y_1, \ldots, y_n)$ eine beschränkte Formel. Dann ist*

$$\{x \in X\ \ V({}^*\mathbb{R}) \models \theta(x, Y_1, \ldots, Y_n)\}$$

eine interne Menge.