

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

17. Sei S eine Sprache und seien $\varphi, \psi \in L^S$. Leiten Sie im Sequenzenkalkül unter Verwendung schon bewiesener abgeleiteter Regeln folgende Tautologien her:

- (a) $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$
- (b) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$.

18. Geben Sie jeweils eine Sprache S und eine Menge von S -Sätzen Φ an, so dass $Mod^S \Phi$ (1) unter Submodellen aber nicht unter Homomorphismen, (2) unter Homomorphismen aber nicht unter Submodellen, (3) weder unter Submodellen noch unter Homomorphismen abgeschlossen ist. Verwenden Sie dazu Beispiele aus der Algebra und der Ordnungstheorie.

19. Sei S eine Sprache und QFF^S die Menge der Formeln $\varphi \in L^S$, in denen keine Quantoren vorkommen. Sei Atm^S die Menge der atomaren Formeln. Eine Abbildung $b : Atm^S \rightarrow \{0, 1\}$ heißt aussagenlogische Belegung. Für $\varphi \in QFF^S$ definiere man $\varphi[b]$ durch:

$$\begin{aligned}\varphi[b] &= b(\varphi) \text{ für } \varphi \in Atm^S \\ \neg\varphi[b] &= 1 \text{ gdw } \varphi[b] = 0 \\ (\varphi \wedge \psi)[b] &= 1 \text{ gdw } \varphi[b] = 1 \text{ und } \psi[b] = 1 \\ (\varphi \vee \psi)[b] &= 1 \text{ gdw } \varphi[b] = 1 \text{ oder } \psi[b] = 1 \\ (\varphi \rightarrow \psi)[b] &= 1 \text{ gdw } \varphi[b] = 0 \text{ oder } \psi[b] = 1.\end{aligned}$$

Zeigen Sie: Kommt das Gleichheitszeichen in $\varphi \in QFF^S$ nicht vor, so ist φ genau dann erfüllbar, wenn es eine aussagenlogische Belegung b mit $\varphi[b] = 1$ gibt.

20. (a) Geben Sie mit Hilfe von Aufgabe 19 ein Verfahren an, das von einer Aussage $\varphi \in QFF^S$, in der das Gleichheitszeichen nicht vorkommt, entscheidet, ob sie erfüllbar ist oder nicht.

(b) Geben Sie ein $\varphi \in QFF^S$ und eine aussagenlogische Belegung b an, so dass $\varphi[b] = 1$ ist aber φ nicht erfüllbar.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe: am 19. 05. 06 in der Vorlesung