Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 2006
21. 04. 06
Blatt 2

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

5. (a) Sei S die Sprache mit nur einem zweistelligen Relationssymbol R. Geben Sie eine Menge von Formeln Φ dieser Sprache an, so dass für alle S-Strukturen $\mathfrak{M}$ und alle Belegungen β in $\mathfrak{M}$ genau dann $\mathfrak{M} \models \Phi[\beta]$ gilt, wenn $\mathfrak{M}$ eine partiell geordnete Menge ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\Phi \models \forall v_1 \forall v_2 (Rv_1v_2 \vee Rv_2v_1)$ nicht gilt.

6. Sei S wie in Aufgabe 5. Geben Sie (wie in Aufgabe 5a) Formeln an, die besagen:

(a) R ist eine Äquivalenzrelation mit mindestens zwei Äquivalenzklassen.

(b) R ist eine Äquivalenzrelation, die eine Äquivalenzklasse mit mehr als einem Element besitzt.

7. Sei S eine Sprache. Eine Formel φ heißt erfüllbar, wenn es eine S-Struktur $\mathfrak{M}$ und eine Belegung β in $\mathfrak{M}$ gibt, so dass $\mathfrak{M} \models \varphi[\beta]$ gilt.

Sei S nun die Sprache mit nur einem zweistelligen Relationssymbol r, einem einstelligen Funktionssymbol f und zwei Konstanten c, k. Zeigen Sie, dass die folgende Formel erfüllbar ist:

$$\begin{aligned}
&\forall v_0\ rv_0fv_0 \wedge \\
&\forall v_0 \forall v_1\ (rv_0v_1 \rightarrow \neg v_0 = v_1) \wedge \\
&\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2\ ((rv_0v_1 \wedge rv_1v_2) \rightarrow rv_0v_2) \wedge \\
&\neg\ rck \wedge \neg\ rkc \wedge \neg\ c = k.
\end{aligned}$$

8. Sei S eine Sprache. Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ S-Strukturen mit Trägermengen A und B. Dann heißt $\mathfrak{A}$ elementare Substruktur von $\mathfrak{B}$, falls $A \subseteq B$ und für alle Belegungen β in $\mathfrak{A}$ und alle Formeln φ genau dann $\mathfrak{A} \models \varphi[\beta]$ gilt, wenn $\mathfrak{B} \models \varphi[\beta]$ ist.

Zeigen Sie: Die Struktur $(\mathbb{N}, +)$ der natürlichen Zahlen mit ihrer Addition hat nur sich selbst als elementare Substruktur.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe: am 28. 04. 06 in der Vorlesung