## Rothmaler, Aufgabe 2, p.83

Sei **K** ein Körper. Wir werden die Theorie der Vektorräume über **K** axiomatisieren. Dazu definieren wir die zweisortige Signatur:

$$\sigma = \langle (Skalar, Vektor), +_S, \cdot_S, +_V, \cdot_V, 0_S, 1_S, 0_V \rangle,$$

wo $+_S, \cdot_S : Skalar \times Skalar \to Skalar$, $+_V : Vektor \times Vektor \to Vektor$, $\cdot_V : Skalar \times Vektor \to Vektor$. $0_S, 1_S : Skalar$, und $0_V : Vektor$.

Wir haben zwei type Variable: Skalarvariable $\lambda, \mu, \ldots$ und Vektorvariable $v, w, \ldots$. Terme definiert man rekursiv (wobie die Sorte übereinstimmen mussen). z.B, $(\lambda +_S \mu) \cdot_V v$ ist ein Term und $\lambda +_V v$ ist kein Term.

Stukture dieser Signatur haben folgende Form:

$$\langle (K, V), +_S, \cdot_S, +_V, \cdot_V, 0_S, 1_S, 0_V \rangle.$$

Variable der Sorte Skalar werden als Elemente von $K$ interpretiert und Variable der Sorte Vektor als Elemente von $V$.

*Axiomatiserung* ersten Schritt: $V$ ist Vektorraum über $K$. Übliche Vektorraumaxiome:

1. $\forall v \forall w (v +_V w = w +_V v)$,
2. $\forall v \forall \lambda \forall \mu (\lambda \cdot_V (\mu \cdot_V v) = (\lambda \cdot_K \mu) \cdot_V v)$,
3. ...

Zweiten Schritt: wir wollen auch dass $\mathrm{Th}(K) = \mathrm{Th}(\mathbf{K})$. Nimm dazu $\mathrm{Th}(\mathbf{K})$ in einer Sprache mit nur skalarvariablen. Dann fügen wir jeden $\phi \in \mathrm{Th}(\mathbf{K})$ als Axiom zu (Man kann statt $\mathrm{Th}(\mathbf{K})$ jede Axiomatisierung von **K** hinfügen)

Mit Lowenheim-Skolem aufwärts kann man zeigen dass es Modelle $\langle K, V, \ldots \rangle$ für diese Theorie gibt wo $K$ nicht isomorph mit **K** ist.