Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

WS 04/05
01. 12. 04
Blatt 8

Übungen zur Mengenlehre I

29. Sei L eine formale Sprache und $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$. Zeigen Sie, dass dann $\dot{(}\frown\varphi \notin \mathrm{Fml}(L)$ ist.

30. Sei L eine formale Sprache und $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein Isomorphismus zwischen zwei L-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Sei b eine Belegung in $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie durch Induktion:
(a) Für alle Terme $t \in \mathrm{Tm}(L)$ gilt $\pi(t[b]) = t[\pi \circ b]$.
(b) Für alle $\varphi \in \mathrm{Fml}(L)$ gilt $\mathfrak{A} \models \varphi[b]$ genau dann, wenn $\mathfrak{B} \models \varphi[\pi \circ b]$ ist.

31. (a) Formulieren Sie den Kompaktheitssatz (=Endlichkeitssatz). Sie können diesen in jedem Lehrbuch über mathematische Logik nachschlagen.
(b) Zeigen Sie damit: Gibt es ein Modell von **ZFC**, so gibt es auch ein Modell $\mathfrak{M} = (M, \epsilon) \models$ **ZFC**, so dass ein $x \in M$ mit $\mathfrak{M} \models x \in \omega$ aber $\mathfrak{M} \models x \neq \tilde{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert.
Ein solches x heißt nonstandard-natürliche Zahl.

32. (a) Sei $\mathfrak{M}$ wie in 31 (b). Zeigen Sie: Es gibt keine Formel φ und $x_1, \ldots, x_n \in M$, so dass

$$x \text{ ist nonstandard-natürliche Zahl} \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)$$

gilt.
D.h. die nonstandard-natürlichen Zahlen bilden keine Klasse in $\mathfrak{M}$.
(b) Sei $\mathfrak{M} = (M, \epsilon) \models$ **ZFC** abzählbar unendlich. Zeigen Sie: Es gibt eine Teilmenge $X \subseteq M$, so dass keine Formel φ und $x_1, \ldots, x_n \in M$ mit $X = \{x \in M \mid \mathfrak{M} \models \varphi(x, x_1, \ldots, x_n)\}$ existieren.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 08. 12. 04 in der Vorlesung

Internet: www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/MengenlehreI.html