Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 04
04. 10. 04

Wiederholungsklausur zur Mathematik für Informatiker II a

Bitte geben Sie auf jedem Blatt Ihrer Lösung Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer an.

Name: DPO:

Vorname: Übungsgruppe:

Matrikelnummer:

Tragen Sie bitte bei Aufgaben, die Sie nicht bearbeitet haben, einen Strich ein:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte								

Vorkorrigierender:

Prüfer: Note:

Viel Erfolg!

1. Sei $\sigma = (S, F, R, K, fct)$ eine Signatur und $\mathfrak{M} = (\mathfrak{A}, \beta)$ ein σ-Modell mit einer σ-Struktur $\mathfrak{A} = ((A_s)_{s\in S}, (f^A)_{f\in F}, (r^A)_{r\in R}, (k^A)_{k\in K})$.
(a) Definieren Sie für die Terme $t \in T^\sigma$ die Interpretation $\mathfrak{M}(t)$ von t im Modell $\mathfrak{M}$.
(b) Definieren Sie für die Aussagen $\varphi \in Aus^\sigma$, wann $\mathfrak{M} \models \varphi$, d.h. $\mathfrak{M}$ ein Modell von φ ist.

2. Sei $G = (E, K)$ ein schlichter endlicher Graph. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
(a) G ist ein Baum
(b) Zwischen zwei beliebigen Ecken von G existiert genau ein Weg.
(c) G ist zusammenhängend, und wenn man eine beliebige Kante aus G entfernt, so ist G nicht mehr zusammenhängend.

Bitte wenden!

3. Kennzeichnen Sie die wahren Aussagen in der Box durch `w`, die falschen durch `f`. Sie brauchen Ihre Antworten nicht zu begründen. Sie erhalten zwei Punkte für jede richtige Antwort, -2 Punkte für jede falsche, aber mindestens 0 Punkte für die Aufgabe insgesamt.

- [ ] Ist auf $\mathbb{R}$ eine zweistellige Relation R durch $xRy :\Leftrightarrow x \in [y, y+1]$ definiert, so ist das eine Äquivalenzrelation.
- [ ] Ist A eine Menge, so ist $\subseteq$ eine partielle Ordnung auf $Pot(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$.
- [ ] In jeder Booleschen Algebra $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ gilt $x + 1 = 1$ für alle $x \in B$.
- [ ] Es gibt 30 2-Permutationen aus $\{1, \ldots, 6\}$.

4. Sei σ eine Signatur und seien $\varphi, \psi \in Aus^\sigma$. Führen Sie einen formalen Beweis für folgende Tautologie:

$$\neg\varphi \to \neg(\varphi \wedge \psi).$$

5. Sei σ eine Signatur mit nur einer Sorte s, einem zweistelligen Relationssymbol r, einem einstelligen Funktionssymbol f und zwei Konstanten c, k. Zeigen Sie, dass die folgende Aussage erfüllbar ist:

$$\begin{aligned}
&(\forall v_0^s\ r(v_0^s, f(v_0^s))) \wedge \\
&(\forall v_0^s \forall v_1^s\ (r(v_0^s, v_1^s) \to \neg v_0^s = v_1^s)) \wedge \\
&(\forall v_0^s \forall v_1^s \forall v_2^s\ (r(v_0^s, v_1^s) \wedge r(v_1^s, v_2^s) \to r(v_0^s, v_2^s))) \wedge \\
&\neg r(c, k) \wedge \neg r(k, c) \wedge \neg c = k.
\end{aligned}$$

6. Sei $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ eine Boolesche Algebra und seien $x, y \in B$, so dass $x + y = y$ gilt. Zeigen Sie, dass dann $x \cdot (-y) = 0$ ist.

7. Sei $G = (E, K)$ ein endlicher Baum, $R = \{x \in E \mid \delta(x) = 1\}$, $M = E \setminus R$ und $f : G \to G$ ein Automorphismus. Beweisen Sie:

(a) Es ist $f[M] = M$ und $f[R] = R$.

(b) $R \neq \emptyset$, und $(M, K \cap M^2)$ ist wieder ein Baum.

(c) Es gibt ein $x \in E$ mit $f(x) = x$, oder es gibt ein $(x, y) \in K$ mit $f(x) = y$ und $f(y) = x$. D.h. der Automorphismus lässt eine Ecke oder eine Kante fest.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.