

Übungen zur Mathematik für Informatiker II a

27. Sei σ eine Signatur und seien $\varphi, \psi \in \text{Aus}^\sigma$. Führen Sie formale Beweise für folgende Tautologien:

- (a) $\neg\neg\varphi \leftrightarrow \varphi$
- (b) $(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)$.

28. Sei $\sigma = (S, F, R, K, \text{fct})$ eine Signatur und QFA^σ die Menge der Aussagen $\varphi \in \text{Aus}^\sigma$, in denen keine Quantoren vorkommen. Sei $\text{Atm}^\sigma := \{r(t_1, \dots, t_n), t_1 = t_2 \in \text{Aus}^\sigma \mid r \in R, t_1, \dots, t_n \in T^\sigma\}$ die Menge der sogenannten atomaren Aussagen. Eine Abbildung $b : \text{Atm}^\sigma \rightarrow \{0, 1\}$ heißt aussagenlogische Belegung. Für $\varphi \in QFA^\sigma$ definiere man $\varphi[b]$ durch:

$$\begin{aligned}\varphi[b] &= b(\varphi) \text{ für } \varphi \in \text{Atm}^\sigma \\ \neg\varphi[b] &= 1 \text{ gdw } \varphi[b] = 0 \\ (\varphi \wedge \psi)[b] &= 1 \text{ gdw } \varphi[b] = 1 \text{ und } \psi[b] = 1 \\ (\varphi \vee \psi)[b] &= 1 \text{ gdw } \varphi[b] = 1 \text{ oder } \psi[b] = 1 \\ (\varphi \rightarrow \psi)[b] &= 1 \text{ gdw } \varphi[b] = 0 \text{ oder } \psi[b] = 1.\end{aligned}$$

Zeigen Sie: Kommt das Gleichheitszeichen $=$ in $\varphi \in QFA^\sigma$ nicht vor, so ist φ genau dann erfüllbar, wenn es eine aussagenlogische Belegung b mit $\varphi[b] = 1$ gibt.

Hinweis: Sei $\varphi[b] = 1$. Um dann ein Modell \mathfrak{M} mit $\mathfrak{M} \models \varphi$ zu konstruieren, wähle man für $s \in S$ $A_s = \{t \in T^\sigma \mid \tau(t) = s\}$ als Trägermengen.

29. (a) Geben Sie mit Hilfe von Aufgabe 28 ein Verfahren an, das von einer Aussage $\varphi \in QFA^\sigma$, in der das Gleichheitszeichen nicht vorkommt, entscheidet, ob sie erfüllbar ist oder nicht.
- (b) Geben Sie ein $\varphi \in QFA^\sigma$ und eine aussagenlogische Belegung b an, so daß $\varphi[b] = 1$ ist aber φ nicht erfüllbar.

Die Aufgaben werden nicht mehr gewertet.

Abgabemöglichkeit: bis spätestens 28. Juni 2004, 14.00 Uhr, Übungskasten, Römerstr., Neubau, 1. Stock, vor dem Eingang zur Empore des Audimax

Internet: www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/MIIA.html

Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung groß die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.