Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 04
14. 06. 04
Blatt 8

Übungen zur Mathematik für Informatiker II a

22. Sei σ eine Signatur und seien $\varphi, \psi, \chi \in Aus^\sigma$. Führen Sie formale Beweise für folgende Tautologien:
(a) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$
(b) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \wedge \psi) \to \chi)$

23. Zeigen Sie, daß es eine Signatur $\sigma = (S, F, R, K, fct)$ mit $s \in S$ und Aussagen $\varphi \in Aus^\sigma$ gibt, so daß folgende Aussagen nicht allgemeingültig sind:
(a) $\varphi \to \forall v_0^s\, \varphi$
(b) $\exists v_0^s\, \varphi \to \varphi$.
Bemerkung: D.h. in der $\forall$-Einführung und der $\exists$-Elimination – die wir später kennenlernen werden – ist die Variablenbedingung tatsächlich nötig.

24. Substitution:
Sei $\sigma = (S, F, R, K, fct)$ mit $s \in S$ eine Signatur. Für Terme $t, u \in T^\sigma$ und die Variablen v_n^s mit $\tau(u) = s$ definiere man rekursiv den Term $t\frac{u}{v_n^s}$:
(i) Ist t ein Variablensymbol, so sei
$t\frac{u}{v_n^s} = t$, falls $t \neq v_n^s$,
$t\frac{u}{v_n^s} = u$, falls $t = v_n^s$.
(ii) Ist t ein Konstantensymbol c, so sei $t\frac{u}{v_n^s} = c$.
(iii) Ist t von der Form $f(t_1, \ldots, t_n)$, so sei $t\frac{u}{v_n^s} = f(t_1\frac{u}{v_n^s}, \ldots, t_n\frac{u}{v_n^s})$.
Zeigen Sie durch Induktion:
Für alle σ-Modelle $\mathfrak{M}$, Terme t, u und Variablen v_n^s mit $\tau(u) = s$ gilt:

$$\mathfrak{M}\frac{\mathfrak{M}(u)}{v_n^s}(t) = \mathfrak{M}(t\frac{u}{v_n^s}).$$

Das waren die letzten Aufgaben, von denen Sie die Hälfte (oder etwas weniger) für die Zulassung zur Klausur benötigen. Die folgenden beiden Aufgaben geben Zusatzpunkte. Sie sind aber auch eine interessante Übung.

Beachten Sie bitte, daß die Übungen auf den weiteren Blättern auch noch klausurrelevanten Stoff behandeln werden.

25. Sei σ eine Signatur und seien $\varphi, \psi \in Aus^\sigma$. Führen Sie formale Beweise für folgende Tautologien:

(a) $(\varphi \vee \psi) \to (\psi \vee \varphi)$

(b) $(\varphi \vee \psi) \to (\neg\varphi \to \psi)$.

26. Sei σ eine Signatur mit einem zweistelligen Relationssymbol r, einem einstelligen Funktionssymbol f und einem Konstantensymbol c. Zeigen Sie: Es gibt keinen Term $t \in T^\sigma$, so daß $r(c,t) \vee \neg\, r(c, f(t))$ allgemeingültig ist.

Bemerkung: Das ist so, obwohl es einen formalen Beweis von $\exists v_0^s\ (r(c, v_0^s) \vee \neg r(c, f(v_0^s)))$ gibt. Hat man allerdings einen formalen Beweis von $\exists v_0^s\ \varphi$, in dem die $\neg$-Regel nicht verwendet wurde, dann gibt es einen Term t, so daß $\varphi(t)$ allgemeingültig ist. Dadurch ist es möglich, aus solchen Beweisen Programme zu extrahieren.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe bis spätestens 21. Juni 2004, 14.00 Uhr, Übungskasten, Römerstr., Neubau, 1. Stock, vor dem Eingang zur Empore des Audimax

Internet: www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/MIIA.html

Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung groß die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.