

Übungen zur Mathematik für Informatiker II a

19. (a) Sei σ eine Signatur und seien $\varphi, \psi, \chi \in Aus^\sigma$. Zeigen Sie, daß $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)))$ allgemeingültig ist.

(b) Leiten Sie $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)))$ im Kalkül her.

20. Sei σ eine Signatur und $\pi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ ein Isomorphismus zwischen σ -Strukturen \mathfrak{A} und \mathfrak{B} . Sei β eine Belegung in \mathfrak{A} , $\mathfrak{M} = (\mathfrak{A}, \beta)$ und $\mathfrak{N} = (\mathfrak{B}, \pi \circ \beta)$. Zeigen Sie durch Induktion:

(a) Für alle Terme $t \in T^\sigma$ gilt $\pi(\mathfrak{M}(t)) = \mathfrak{N}(t)$.

(b) Für alle Aussagen $\varphi \in Aus^\sigma$ gilt $\mathfrak{M} \models \varphi$ genau dann, wenn $\mathfrak{N} \models \varphi$ ist.

21. Sei $M = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \mid \varphi \in \mathbb{R} \right\}$ die Menge der Drehmatrizen, $+_M$ ihre Addition, \cdot_M ihre Multiplikation und A, B, C bzw. D die Funktion die $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ auf a, b, c bzw. d abbildet. Sei $(\mathbb{R}, +, -, \cdot, \cos, \sin)$ die Struktur der reellen Zahlen mit ihrer Addition, Subtraktion, Multiplikation und der Sinus- und Cosinusfunktion. Sei $\mathfrak{A} = (M, +_M, \cdot_M, A, B, C, D, \mathbb{R}, +, \cdot, -, \cos, \sin)$ und σ die Signatur dieser Struktur.

Geben Sie ein $\varphi \in Aus^\sigma$ an, so daß für alle σ -Strukturen $\mathfrak{B} = (X, +_X, \cdot_X, A_X, B_X, C_X, D_X, \mathbb{R}, +, \cdot, -, \cos, \sin)$ und beliebige Belegungen β in \mathfrak{A} und β' in \mathfrak{B} folgendes gilt:

(i) $(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi$

(ii) $(\mathfrak{B}, \beta') \models \varphi \Rightarrow \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}$.

Sie brauchen diese Eigenschaften nicht zu zeigen.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe bis spätestens 14. Juni 2004, 14.00 Uhr, Übungskasten, Römerstr., Neubau, 1. Stock, vor dem Eingang zur Empore des Audimax

Internet: www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/MIIA.html

Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung groß die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.