Mathematisches Institut
der Universität Bonn
P. Koepke, B. Irrgang

SoSe 04
10. 05. 04
Blatt 4

Übungen zur Mathematik für Informatiker II a

10. Sei $(B, +, \cdot, -, 0, 1)$ eine Boolesche Algebra. Für $x, y \in B$ definiere $x \leq y$ durch $x+y = y$. Beweisen Sie, daß $(B, \leq)$ dann eine partielle Ordnung ist, in der zu zwei Elementen x, y stets auch $sup(\{x, y\})$ existiert. Sie dürfen dazu alle in der Vorlesung angegebenen Rechengesetze verwenden.

11. In Aufgabe 8 hatten wir gesehen, daß sich jedes $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ mit Booleschen Operationen als Summe von höchstens 2^n Produkten schreiben läßt. Die Anzahl der Summanden läßt sich oft mit dem Distributivgesetz reduzieren. Z. B. ist $xyz+xy(-z)+(-x)y(-z) = xy(z+(-z))+(-x)y(-z) = xy + (-x)y(-z)$. Zeigen Sie: Ist $n = 6$, so gibt es eine Summe mit 32 Summanden, die sich so nicht weiter vereinfachen läßt.

12. Definiere rekursiv den Begriff des n-stelligen Booleschen Terms: $0, 1, x_1, \ldots, x_n$ sind Boolsche Terme. Sind s und t Boolsche Terme, so auch $s+t$, $s \cdot t$ und $-t$.

Wie in Aufgabe 8 definiert jeder n-stellige Boolesche Term t eine Funktion $F_t : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Technisch werden Boolsche Terme als Schaltungen realisiert. Der Addition entspricht dann z. B. ein Baustein mit zwei Eingängen und einen Ausgang. Für t sei die Komplexität $C(t)$ die Anzahl der in t auftretenden zweistelligen Operationszeichen. Für $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ sei $C(f) = min\{C(t) \mid F_t = f\}$. Wir sagen f hängt von x_i ab, wenn es $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_n \in \{0,1\}$ gibt mit

$$f(c_1, \ldots, c_{i-1}, 0, c_{i+1}, \ldots, c_n) \neq f(c_1, \ldots, c_{i-1}, 1, c_{i+1}, \ldots, c_n).$$

(a) Zeigen Sie: Hängt f von m Variablen ab, so gilt $C(f) \geq m - 1$.

(b) Geben Sie ein $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ an, so daß $C(f) = 3$ ist.

Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet.

Abgabe bis spätestens 17. Mai 2004, 14.00 Uhr, Übungskasten, Römerstr., Neubau, 1. Stock, vor dem Eingang zur Empore des Audimax

Internet: www.math.uni-bonn.de/people/irrgang/MIIA.html

Bitte geben Sie auf Ihrer Lösung groß die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.