MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 21. Juni 2004
Abgabetermin: 28. Juni 2004

Einführung in die Mathematische Logik
Prof. Dr. P. Koepke, Dr. B. Löwe, Dipl.-Math. S. Bold
Sommersemester 2004
Übungsblatt 9

Definitionen:

- Eine Menge A ist **transitiv**, $\mathrm{Trans}(A)$, falls gilt

  $\mathrm{Trans}(A) \;:\Leftrightarrow\; \forall y \forall z\, (y \in A \wedge z \in y) \rightarrow z \in A.$

- Die **Vereinigung** einer Menge A ist $\bigcup A := \{y \mid \exists x\, (x \in A \wedge y \in x)\}$.

- Der **Durchschnitt** einer Menge A ist $\bigcap A := \{y \mid \forall x\, (x \in A \rightarrow y \in x)\}$.

- Eine Ordinalzahl ist ein **Limesordinalzahl**, wenn sie kein unmittelbarer Nachfolger einer Ordinalzahl ist.

- Eine Menge $X \subseteq \mathrm{Ord}$ ist **unbeschränkt**, wenn gilt $\forall \beta \in X \exists \alpha \in X (\beta \in \alpha)$.

Aufgabe 33

(a) Formalisieren Sie den Begriff "Topologischer Raum" in der Sprache der Mengenlehre. (4 Punkte)

(b) Geben Sie alle Topologien auf $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ an. Dabei sind Topologien die isomorph, aber nicht identisch sind, als verschieden zu betrachten. (4 Punkte)

(c) **Bonus:** Wenn sie Spass an endlicher Kombinatorik haben: Finden Sie alle Topologien auf 3. (30 Punkte)

Aufgabe 34

(a) Beweisen Sie, unter Angabe der verwendeten Axiome der Mengenlehre, dass für je zwei Mengen x und y das Hausdorff-Paar $(x,y)_{\mathrm{H}} := \{\{x,0\},\{y,1\}\}$ existiert. (10 Punkte)

(b) Beweisen Sie, dass das Hausdorff-Paar $(x,y)_{\mathrm{H}}$ die Grundeigenschaft geordneter Paare erfüllt, d.h. dass gilt

$$\forall x_0, x_1, y_0, y_1\, ((x_0,y_0)_{\mathrm{H}} = (x_1,y_1)_{\mathrm{H}} \leftrightarrow (x_0 = x_1 \wedge y_0 = y_1)).$$

(10 Punkte)

(c) Geben Sie analog zu (b) eine Formel für die Grundeigenschaft geordneter Tripel an. (3 Punkte)

(d) Untersuchen Sie, ob die durch

$$\langle x,y,z\rangle_0 := \{\{x,0\},\{y,1\},\{z,2\}\} \text{ bzw. } \langle x,y,z\rangle_1 := \{\{x\},\{x,y\},\{x,y,z\}\}$$

definierten Tripel diese Grundeigenschaft erfüllen. (je 10 Punkte)

Aufgabe 35
Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{P}(A)$ zusammen mit der symmetrischen Differenz $a \triangle b := (a \backslash b) \cup (b \backslash a)$ als Addition und der Schnittmengenbildung als Multiplikation ein Ring ist. (10 Punkte)

(b) Ist $\mathcal{P}(A)$ mit diesen Verknüpfungen auch ein Körper? (5 Punkte)

Aufgabe 36
Sei $A \neq \emptyset$ eine transitive Menge. Zeigen Sie:

(a) Die Vereinigung $\bigcup A$ ist transitiv. (8 Punkte)

(b) Der Durchschnitt $\bigcap A$ ist transitiv. (8 Punkte)

(c) Die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ ist transitiv. (8 Punkte)

Aufgabe 37
Sei $C \subseteq \mathrm{Ord}$ eine nicht leere Teilmenge der Ordinalzahlen.

(a) Zeigen Sie, dass $\bigcap C$ eine Ordinalzahl ist. (8 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $\bigcup C$ eine Ordinalzahl ist. (8 Punkte)

(c) Sei $\alpha \in \mathrm{Ord}$. Zeigen Sie, dass α genau dann ein Limesordinalzahl ist, wenn $(\beta + 1) \in \alpha$ für alle $\beta \in \alpha$ gilt. (8 Punkte)

(d) Zeigen Sie: Ist eine Menge $X \subseteq \mathrm{Ord}$ unbeschränkt, so ist $\bigcup X$ eine Limesordinalzahl. (8 Punkte)