MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN

http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 7. Juni 2004
Abgabetermin: 14. Juni 2004

Einführung in die Mathematische Logik
Prof. Dr. P. Koepke, Dr. B. Löwe, Dipl.-Math. S. Bold
Sommersemester 2004
Übungsblatt 7

Aufgabe 24
Sei A eine Menge beliebiger unendlicher Kardinalität.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes Element $a \in A$ eine binäre Operation $\circ$ und eine unäre Operation $-$ (beide auf A) existieren, so dass $(A, \circ, -, a)$ eine Gruppe mit a als neutralem Element ist. (10 Punkte)

(b) Gilt obiges Resultat analog auch für Ringe, Algebren, bzw. Körper ? (5 Punkte)

Aufgabe 25
Sei $S_{\text{Arith}} := (+, *, 0, 1)$ die Symbolmenge der Sprache der Körpertheorie. Untersuchen Sie, ob die folgenden $L^{S_{\text{Arith}}}$-Modellklassen axiomatisierbar sind:

(a) die Modellklasse der endlichen Körper. (5 Punkte)

(b) die Modellklasse der unendlichen Körper. (5 Punkte)

(c) die Modellklasse der abzählbaren Körper. (5 Punkte)

(d) die Modellklasse der überabzählbaren Körper. (5 Punkte)

Aufgabe 26
Sei S eine Symbolmenge. Für jede konsistente Menge Φ von L^S-Sätzen sei ein Model $\mathfrak{A}_\Phi \models \Phi$ gegeben. Sei $\Sigma := \{\mathfrak{A}_\Phi \,|\, \Phi \text{ eine erfüllbare Menge von } L^S \text{ Sätzen}\}$. Für jeden L^S-Satz ϕ sei $X_\phi := \{\mathfrak{A} \in \Sigma \,|\, \mathfrak{A} \models \phi\}$.

(a) Zeigen sie, dass $\{X_\phi \,|\, \phi \text{ ein } L^S\text{-Satz}\}$ die Basis einer Topologie auf Σ ist. (10 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass jede Menge X_ϕ abgeschlossen ist. (10 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass jede offene Überdeckung von Σ eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h. Σ (quasi)kompakt ist. (10 Punkte)

Aufgabe 27
Es sei $<$ eine Partielle Ordnung auf X, d.h. eine reflexive, transitive Relation auf der Menge X. Ferner sei $n < \omega$ und $x_1, \ldots, x_n \in X$. Dann heißt $(x_1, \ldots, x_n)$ ein Weg in X (der Länge n) von x_1 nach x_n falls gilt:

(i) Für $0 < i < n$ ist x_i der direkte $<$-Vorgänger von x_{i+1}.

(ii) Für $i \neq j$ gilt $x_i \neq x_j$.

Ein Weg $(x_1, \dots, x_n)$ heißt Kreis in X, falls $x_1 = x_n$ gilt. Die partielle Ordnung $(X, <)$ heißt kreisfrei, falls X keine nichttrivialen Kreise (d.h., keine Kreise der Länge größer als 1) besitzt.
Axiomatisieren Sie in der Sprache $L^{S_{\text{Äq}}}$ ($S_{\text{Äq}} = (<)$) die Modellklasse $\mathcal{M}$ der kreisfreien partiellen Ordnungen. Hat $\mathcal{M}$ eine endliche Axiomatisierung, d.h., gibt es eine endliche Ausdrucksmenge Φ, so dass Φ die Modellklasse $\mathcal{M}$ axiomatisiert? (20 Punkte)

Tipp: Überlegen (und zeigen) Sie: $\mathrm{Mod}^{L^{S_{\text{Äq}}}}(\Psi)$ hat genau dann eine endliche Axiomatisierung, wenn es ein endliches $\Phi \subseteq \Psi$ gibt, das $\mathrm{Mod}^{L^{S_{\text{Äq}}}}(\Psi)$ axiomatisiert.