Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN

http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 24. Mai 2004
Abgabetermin: 7. Juni 2004

Einführung in die Mathematische Logik
Prof. Dr. P. Koepke, Dr. B. Löwe, Dipl.-Math. S. Bold
Sommersemester 2004
Übungsblatt 6

Bemerkungen

Wegen $\phi\frac{x}{x} = \phi$ erhalten wir aus ($\exists$S), (Sub) und ($\exists$A) die folgenden abgeleiteten Regeln:

$$(\exists S')\ \frac{\Gamma \quad \phi}{\Gamma\ \exists x\,\phi} \qquad (\mathrm{Sub}')\ \frac{\Gamma \qquad \phi}{\Gamma\ x = t\ \phi\frac{t}{x}} \qquad (\exists A')\ \frac{\Gamma \quad \phi \quad \psi}{\Gamma\ \exists x\,\phi \quad \psi}, \text{ falls } x \text{ nicht frei in } \Gamma\,\psi.$$

Wir geben auch den beiden in der Vorlesung abgeleiteten Regeln über die Gleichheit Namen:

$$(\mathrm{Sym})\ \frac{\Gamma\ t_1 = t_2}{\Gamma\ t_2 = t_1} \qquad (\mathrm{Tran})\ \frac{\begin{array}{l}\Gamma\ t_1 = t_2\\ \Gamma\ t_2 = t_3\end{array}}{\Gamma\ t_1 = t_3}$$

Aufgabe 20

Leiten Sie die folgenden Regeln im Sequenzenkalkül ab. In Zukunft werden wir diese Regeln voraussetzen, d.h. sie können in Beweisen verwendet werden. Dies gilt auch für diese Aufgabe, d.h. sobald eine Regel bewiesen ist, darf sie benutzt werden.

(a) (10 Punkte)

$$(\mathrm{SR})\ \frac{\begin{array}{l}\Gamma\ Rt_1\ldots t_n\\ \Gamma\ t_1 = t_1'\\ \vdots\\ \Gamma\ t_n = t_n'\end{array}}{\Gamma\ Rt_1'\ldots t_n'} \qquad (\mathrm{Sf})\ \frac{\begin{array}{l}\Gamma\ t_1 = t_1'\\ \vdots\\ \Gamma\ t_n = t_n'\end{array}}{\Gamma\ ft_1\ldots t_n = ft_1'\ldots t_n'}$$

Für n-stelliges $R \in S$. Für n-stelliges $f \in S$.

(b) $(\forall 1)\ \dfrac{\Gamma\ \forall x\,\phi}{\Gamma \quad \phi\frac{t}{x}}$ $\quad(\forall 1')\ \dfrac{\Gamma\ \forall x\,\phi}{\Gamma \qquad \phi}$ $\quad(\forall A)\ \dfrac{\Gamma\ \phi\frac{t}{x} \quad \psi}{\Gamma\ \forall x\,\phi \quad \psi}$ $\quad(\forall A')\ \dfrac{\Gamma\ \phi \qquad \psi}{\Gamma\ \forall x\,\phi \quad \psi}$ (10 Punkte)

(c) $(\forall S)\ \dfrac{\Gamma\ \phi\frac{y}{x}}{\Gamma\ \forall x\,\phi}$, falls y nicht frei in $\Gamma\,\forall x\,\phi$ ist. $\quad(\forall S')\ \dfrac{\Gamma\ \phi}{\Gamma\ \forall x\,\phi}$, falls x nicht frei in Γ ist.
(10 Punkte)

Aufgabe 21

Es sei ($\exists\forall$) die Regel $\dfrac{}{\Gamma\ ((\exists x\,\phi) \rightarrow (\forall x\,\phi))}$.

(a) Ist ($\exists\forall$) im Sequenzenkalkül ableitbar? (10 Punkte)

(b) Angenommen, wir nähmen die Regel ($\exists\forall$) zum Sequenzenkalkül hinzu, wäre dann jeder Ausdruck ableitbar? (10 Punkte)

Aufgabe 22
Sei eine Symbolmenge S gegeben und Φ eine widerspruchsvolle Menge von Aussagen in der Sprache L^S.

(a) Bestimmen Sie $\mathfrak{I}^\Phi$. (10 Punkte)

(b) Hängt $\mathfrak{I}^\Phi$ von der widerspruchsvollen Menge Φ ab? (10 Punkte)

Aufgabe 23
Aus der Vorlesung kennen sie $S_{Gr} = \{\circ, e\}$, die Symbolmenge der Sprache der Gruppentheorie. Sei $\Phi = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ die folgende Formalisierung der Gruppenaxiome (in $L^{S_{Gr}}$):
$\phi_1 := \forall x \forall y \forall z\, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
$\phi_2 := \forall x\, x \circ e = x$
$\phi_3 := \forall x \exists y\, x \circ y = e$
Formalisieren und beweisen Sie im Sequenzenkalkül die Aussage
"Das Neutrale Element einer Gruppe ist eindeutig."
(20 Punkte)
Hinweis: Im Mengenlehre-Skript, das auf der Logic-Homepage erhältlich ist, findet sich auf den Seiten 133-134 ein ähnlicher Beweis.