MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 17. Mai 2004
Abgabetermin: 24. Mai 2004

Einführung in die Mathematische Logik
Prof. Dr. P. Koepke, Dr. B. Löwe, Dipl.-Math. S. Bold
Sommersemester 2004
Übungsblatt 5

Einführung der fehlenden Junktoren und Quantoren

Wir erweitern das Sequenzenkalkül um folgende Konventionen:
$(\phi \wedge \psi) := \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$, $(\phi \rightarrow \psi) := (\neg\phi \vee \psi)$,
$(\phi \leftrightarrow \psi) := (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$, $\forall x\, \phi := \neg\exists x\, \neg\phi$.

Aufgabe 15

Leiten Sie die folgenden Regeln im Sequenzenkalkül ab. In Zukunft werden wir diese Regeln voraussetzen, d.h. sie können in Beweisen verwendet werden. Sie können diese Regeln auch in dieser Aufgabe verwenden, vorausgesetzt Sie benutzen nur schon bewiesene Regeln.

(a) (Wid') $\dfrac{\begin{array}{ll}\Gamma & \phi\\ \Gamma & \neg\phi\end{array}}{\begin{array}{ll}\Gamma & \psi\end{array}}$ ((TND) $\dfrac{}{\Gamma\, (\phi \vee \neg\phi)}$ (1 Punkt)

(b) (KP1) $\dfrac{\Gamma\ \ \phi\ \ \psi}{\Gamma\ \neg\psi\ \neg\phi}$ (KP2) $\dfrac{\Gamma\ \neg\psi\ \neg\phi}{\Gamma\ \ \phi\ \ \psi}$ (KP3) $\dfrac{\Gamma\ \neg\phi\ \psi}{\Gamma\ \neg\psi\ \phi}$ (KP4) $\dfrac{\Gamma\ \phi\ \neg\psi}{\Gamma\ \psi\ \neg\phi}$ (10 Punkte)

(c) (MP') $\dfrac{\begin{array}{ll}\Gamma & (\phi \vee \psi)\\ \Gamma & \neg\phi\end{array}}{\begin{array}{ll}\Gamma & \psi\end{array}}$ (MP) $\dfrac{\begin{array}{ll}\Gamma & (\phi \rightarrow \psi)\\ \Gamma & \phi\end{array}}{\begin{array}{ll}\Gamma & \psi\end{array}}$ ($N^2 1$) $\dfrac{\Gamma\ \ \phi}{\Gamma\ \neg\neg\phi}$ ($N^2 2$) $\dfrac{\Gamma\ \neg\neg\phi}{\Gamma\ \ \phi}$ (10 Punkte)

(d) ($\wedge 1$) $\dfrac{\begin{array}{ll}\Gamma & \phi\\ \Gamma & \psi\end{array}}{\Gamma\, (\phi \wedge \psi)}$ ($\wedge 2$) $\dfrac{\Gamma\, (\phi \wedge \psi)}{\Gamma\ \ \phi}$ ($\wedge 3$) $\dfrac{\Gamma\, (\phi \wedge \psi)}{\Gamma\ \ \psi}$ ($\rightarrow$) $\dfrac{\Gamma\ \phi\ \ \psi}{\Gamma\ \ (\phi \rightarrow \psi)}$ (10 Punkte)

Aufgabe 16

Es sei S eine eine Symbolmenge für eine Sprache erster Stufe. Wir definieren die Menge $P(S)$ der Ausdrücke von S, die in pränexer Normalform sind, rekursiv durch

$$\begin{aligned}
P_0(S) &:\equiv \{\varphi \in \mathrm{Fml}(S) \mid \varphi \text{ ist quantorenfrei}\};\\
P_{n+1}(S) &:\equiv P_n(S) \cup \{\exists v_i\, \varphi \mid \varphi \in P_n(S)\ \wedge\ i < \omega\} \cup \{\forall v_i\, \varphi \mid \varphi \in P_n(S)\ \wedge\ i < \omega\};\\
P(S) &:\equiv \bigcup_{n<\omega} P_n(S).
\end{aligned}$$

Wir sagen, daß ein Ausdruck φ **in pränexer Normalform** (oder auch kurz: **pränex**) ist, falls $\varphi \in P(S)$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varphi \in \mathrm{Fml}(S)$ ein $\varphi' \in P(S)$ gibt mit $\models (\varphi \leftrightarrow \varphi')$. (20 Punkte)

Aufgabe 17
Es sei S eine eine Symbolmenge für eine Sprache erster Stufe und $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur. Einen Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}$ (vgl. Aufgabe 9) nennen wir auch **Automorphismus**.

(a) Zeigen Sie, daß die Automorphismen einer Struktur $\mathfrak{A}$ eine Gruppe bilden. (10 Punkte)

(b) Geben Sie eine unendliche Struktur an, deren einziger Automorphismus die Identität ist. (10 Punkte)

(c) Geben Sie eine abzählbare Struktur mit überabzählbarer Automorphismengruppe an. (10 Punkte)

Aufgabe 18
Sei $S := \{R\}$, R ein einstelliges Relationssymbol und $\Phi := \{\exists x Rx\} \cup \{\neg Ry \mid y \text{ eineVariable}\}$. Zeigen Sie:

(a) Φ ist erfüllbar und wiederspruchsfrei. (10 Punkte)

(b) Für keinen Term $t \in T^S$ gilt $\Phi \vdash Rt$. (10 Punkte)

(c) Ist $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$ ein Modell von Φ, so ist $A \backslash \{\mathfrak{I}(t) \mid t \in T^S\}$ nicht leer. (10 Punkte)

Aufgabe 19
Sei $S := \{R\}$, R ein einstelliges Relationssymbol und seien x und y verschiedene Variablen. Für $\Phi := \{Rx \vee Ry\}$ zeige man:

(a) Nicht $\Phi \vdash Rx$ und nicht $\Phi \vdash \neg Rx$, d.h. Φ ist nicht negationstreu.(10 Punkte)

(b) Nicht $\mathfrak{I}^{\Phi} \models \Phi$. (10 Punkte)