MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN

Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 6. Mai 2004
Abgabetermin: 17. Mai 2004

Einführung in die Mathematische Logik
Prof. Dr. P. Koepke, Dr. B. Löwe, Dipl.-Math. S. Bold
Sommersemester 2004
Übungsblatt 4

Aufgabe 11

Sei X eine beliebige Menge und $\wp(X)$ die **Potenzmenge von** X (die Menge aller Teilmengen von X). Für $A \subseteq X$ definieren wir $-A := X \backslash A := \{x \in X\,;\, x \notin A\}$. Zeigen Sie, daß $\mathbf{Pow}(X) := (\wp(X); \cup, \cap, -, \varnothing, X)$ eine Boolesche Algebra ist (vgl. Aufgabe 10). (15 Punkte)

Aufgabe 12

Sei S eine Symbolmenge für eine Sprache erster Stufe und $\mathfrak{K}$ eine Klasse von S-Strukturen. Für zwei S-Sätze σ und τ definieren wir

$$\sigma \sim_{\mathfrak{K}} \tau :\iff \forall \mathbf{A} \in \mathfrak{K}\,(\mathbf{A} \models \sigma \iff \mathbf{A} \models \tau)\,.$$

Es sei $\mathrm{Sent}(S)$ die Menge der S-Sätze und $\mathrm{L}(S, \mathfrak{K})$ die Menge der $\sim_{\mathfrak{K}}$-Äquivalenzklassen von S-Sätzen (also $\mathrm{L}(S, \mathfrak{K}) = \mathrm{Sent}(S)/{\sim_{\mathfrak{K}}}$). Wir definieren nun

$$\begin{aligned}
[\varphi]_{\sim_{\mathfrak{K}}} \cdot [\psi]_{\sim_{\mathfrak{K}}} &:= [\varphi \wedge \psi]_{\sim_{\mathfrak{K}}} \\
[\varphi]_{\sim_{\mathfrak{K}}} + [\psi]_{\sim_{\mathfrak{K}}} &:= [\varphi \vee \psi]_{\sim_{\mathfrak{K}}} \\
-[\varphi]_{\sim_{\mathfrak{K}}} &:= [\neg\varphi]_{\sim_{\mathfrak{K}}} \\
1 &:= [\forall x (x = x)]_{\sim_{\mathfrak{K}}} \\
0 &:= -1
\end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Diese Operationen sind wohldefiniert. (10 Punkte)

(b) Die Struktur

$$\mathbf{Lind}(S, \mathfrak{K}) := (\mathrm{L}(S, \mathfrak{K}); +, \cdot, -, 0, 1)$$

ist eine Boolesche Algebra. Wir nennen sie die $\mathfrak{K}$-**Lindenbaumalgebra**. (20 Punkte)

(c) Die Lindenbaumalgebra ist stets abzählbar. (6 Punkte)

Hinweis. Eine Menge X ist abzählbar, falls eine Surjektion von einer abzählbaren Menge auf X existiert. Warum ist die Menge aller S-Sätze abzählbar?

(d) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Je zwei Elemente von $\mathfrak{K}$ sind elementar äquivalent (vgl. Aufgabe 9), und
2. $\mathbf{Lind}(S, \mathfrak{K})$ hat genau zwei Elemente. (15 Punkte)

Aufgabe 13

Falls $\mathbf{B}_0 = (B_0; +, \cdot, -, 0, 1)$ und $\mathbf{B}_1 = (B_1; \oplus, \otimes, \ominus, \perp, \top)$ zwei Boolesche Algebren sind, und $F : B_0 \to B_1$, so nennen wir F einen **Booleschen Morphismus** falls für alle $x, y \in B_0$

1. $F(x+y) = F(x) \oplus F(y)$,
2. $F(x \cdot y) = F(x) \otimes F(y)$,
3. $F(-x) = \ominus F(x)$,
4. $F(0) = \perp$ und
5. $F(1) = \top$.

(a) Inwieweit hängen der Begriff des Booleschen Morphismus und der allgemeine Begriff von Isomorphismen von Strukturen (vgl. Aufgabe 9) zusammen? (2 Punkte)

(b) Sei S eine Symbolmenge für eine Sprache erster Stufe und sei $\mathfrak{K}$ eine Menge von S-Strukturen. Zeigen Sie: Es gibt einen Booleschen Morphismus von $\mathbf{Lind}(S, \mathfrak{K})$ nach $\mathbf{Pow}(\mathfrak{K})$. (12 Punkte)

Hinweis. Die Berechnungen aus Aufgabe 4 könnten helfen.

Aufgabe 14

Der Ableitungskalkül der Vorlesung verwendet nur die Symbole $\vee$, $\exists$ und $\neg$. Man kann die logischen Symbole $\wedge$ und $\forall$ als Abkürzungen einführen: $\varphi \wedge \psi$ stehe für den Ausdruck $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ und $\forall x\varphi$ stehe für den Ausdruck $\neg\exists x\neg\varphi$. Zeigen Sie (unter Verwendung der angegebenen Bedeutungen von $\wedge$ und $\forall$) die Gültigkeit der folgenden fünf Ableitungsregeln (jeweils 8 Punkte, insgesamt also 40 Punkte):

$$\frac{\Phi, \varphi \vdash \psi}{\Phi, \neg\neg\varphi \vdash \psi}, \quad \frac{}{\Phi, \varphi, \neg\varphi \vdash \psi}, \quad \frac{\Phi \vdash \varphi \wedge \psi}{\Psi \vdash \varphi}, \quad \frac{\begin{array}{c}\Phi \vdash \varphi \\ \Phi \vdash \psi\end{array}}{\Phi \vdash \varphi \wedge \psi}, \text{ and } \frac{\Phi \vdash \forall x\varphi}{\Phi \vdash \varphi}.$$