Uni Bonn
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN

LOGIC BONN
http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 28. Juni 2004
*Abgabetermin:* 5. Juli 2004

**Einführung in die Mathematische Logik**
*Prof. Dr. P. Koepke, Dr. B. Löwe, Dipl.-Math. S. Bold*
**Sommersemester 2004**
**Übungsblatt 10**

### Aufgabe 38

Ein Beweistext $z_0, \cdots, z_{m-1}$ ist **wohlstrukturiert**, wenn die Folge $k(0), \cdots, k(m-1)$ für diesen Beweistext definiert ist.
Zeigen Sie, dass ein Beweistext genau dann wohlstrukturiert ist, wenn für alle $i < m$ gilt: Falls $z_i = \varphi]$, dann ist $k(i) \neq -1$. (12 Punkte)

### Aufgabe 39

In der Vorlesung wurde die Tautologie $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$ bewiesen:

| $i$ | $k(i)$ | $V_i$ | $z_i$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $-1$ | $\emptyset$ | $[\varphi$ |
| 1 | 0 | $\{\varphi\}$ | $[\psi$ |
| 2 | 1 | $\{\varphi, \psi\}$ | $\varphi]$ |
| 3 | 0 | $\{\varphi, (\psi \to \varphi)\}$ | $(\psi \to \varphi)]$ |
| 4 | $-1$ | $\{(\varphi \to (\psi \to \varphi))\}$ | $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$ |

Beweisen Sie in gleicher Weise, d.h. mit Angabe von $k(i)$ und $V_i$, die folgenden Tautologien:

1. $((\varphi \wedge \psi) \to \varphi)$. (2 Punkte)
2. $((\varphi \vee \neg\varphi) \to (\psi \vee \neg\psi))$. (5 Punkte)

### Aufgabe 40

Sei $X$ eine Menge, gegeben sei eine Funktion $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$, so dass $f(A) \in A$ für alle $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ gilt.
Eine Funktion $k$ heißt **$f$-Keim**, falls es eine Ordinalzahl $\nu$ gibt, so dass $\mathrm{dom}(k) = \nu$ und $\forall \alpha < \nu \, (k(\alpha) = f(X \setminus \{k(\beta) \mid \beta < \alpha\})$.
Der Klassenterm $\Phi$ sei definiert durch

$$\Phi := \{(\alpha, x) \mid \text{Es gibt einen } f\text{-Keim } k \text{ mit } \alpha \in \mathrm{dom}(k) \text{ und } k(\alpha) = x\}.$$

1. Zeigen Sie: Sind $k$, $k'$ $f$-Keime, dann gilt $k(\alpha) = k'(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathrm{dom}(k) \cap \mathrm{dom}(k')$. (15 Punkte)

   (*Hinweis*: Induktion nach $\alpha$.)

2. Zeigen Sie, dass $\Phi$ eine Funktion ist. (4 Punkte)

3. Beweisen Sie: Gilt $\Phi(\alpha) = x$ und $\Phi(\beta) = x$, so ist $\alpha = \beta$. (12 Punkte)
4. Zeigen Sie $\mathrm{dom}(\Phi) \neq \mathrm{Ord}$. (25 Punkte)

   (*Hinweis*: Verwenden Sie das Ersetzungsaxiom, denken Sie auch daran, dass nach 3. gilt: $\mathrm{dom}(\Phi) = \Phi^{-1}[X]$.)
5. Zeigen Sie, dass $\mathrm{dom}(\Phi)$ eine Ordinalzahl $\xi$ ist. (18 Punkte)

   (*Hinweis*: Verwenden Sie Induktion.)
6. Zeigen Sie, dass $\Phi : \xi \to X$ eine Bijektion ist. (9 Punkte)

**Aufgabe 41**

1. Beweisen Sie: Aus $\mathsf{AC}$ folgt die Aussage

   Für alle Mengen $X$ existiert eine Funktion $f : \mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\} \to X$,
   so dass $f(A) \in A$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\}$.

   (4 Punkte)
2. Beweisen Sie: Aus $\mathsf{AC}$ folgt der Zermelosche Wohlordnungssatz ($\mathsf{ZWO}$):

   Für jede Menge $X$ existiert eine bijektive Funktion $g : X \to \xi$, die $X$ auf eine Ordinalzahl $\xi$ abbildet .

   (3 Punkte)

   (*Hinweis*: Verwenden Sie Aufgabe 40.)
3. Beweisen Sie: Aus $\mathsf{ZWO}$ folgt $\mathsf{AC}$. (10 Punkte)

   (*Hinweis*: $X := \bigcup\{F(x) \mid x \in \mathrm{dom}(F)\}$.)