Bonn, den 28. Juni 2004
Abgabetermin: 5. Juli 2004

Einführung in die Mathematische Logik
Prof. Dr. P. Koepke, Dr. B. Löwe, Dipl.-Math. S. Bold
Sommersemester 2004
Übungsblatt 10

Aufgabe 38

Ein Beweistext $z_0, \cdots, z_{m-1}$ ist **wohlstrukturiert**, wenn die Folge $k(0), \cdots, k(m-1)$ für diesen Beweistext definiert ist.
Zeigen Sie, dass ein Beweistext genau dann wohlstrukturiert ist, wenn für alle $i < m$ gilt: Falls $z_i = \varphi]$, dann ist $k(i) \neq -1$. (12 Punkte)

Aufgabe 39

In der Vorlesung wurde die Tautologie $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$ bewiesen:

i	$k(i)$	V_i	z_i
0	-1	$\emptyset$	$[\varphi$
1	0	$\{\varphi\}$	$[\psi$
2	1	$\{\varphi, \psi\}$	$\varphi]$
3	0	$\{\varphi, (\psi \rightarrow \varphi)\}$	$(\psi \rightarrow \varphi)]$
4	-1	$\{(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))\}$	$(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$

Beweisen Sie in gleicher Weise, d.h. mit Angabe von $k(i)$ und V_i, die folgenden Tautologien:

1. $((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi)$. (2 Punkte)
2. $((\varphi \vee \neg\varphi) \rightarrow (\psi \vee \neg\psi))$. (5 Punkte)

Aufgabe 40

Sei X eine Menge, gegeben sei eine Funktion $f : \mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\} \rightarrow X$, so dass $f(A) \in A$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\}$ gilt.
Eine Funktion k heißt f**-Keim**, falls es eine Ordinalzahl ν gibt, so dass $\mathrm{dom}(k) = \nu$ und $\forall\alpha < \nu\, (k(\alpha) = f(X\backslash\{k(\beta) \,|\, \beta < \alpha\})$.
Der Klassenterm Φ sei definiert durch

$$\Phi := \{(\alpha, x) \,|\, \text{Es gibt einen } f\text{-Keim } k \text{ mit } \alpha \in \mathrm{dom}(k) \text{ und } k(\alpha) = x\}.$$

1. Zeigen Sie: Sind k, k' f-Keime, dann gilt $k(\alpha) = k'(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathrm{dom}(k) \cap \mathrm{dom}(k')$. (15 Punkte)

   (*Hinweis*: Induktion nach α.)

2. Zeigen Sie, dass Φ eine Funktion ist. (4 Punkte)

3. Beweisen Sie: Gilt $\Phi(\alpha) = x$ und $\Phi(\beta) = x$, so ist $\alpha = \beta$. (12 Punkte)

4. Zeigen Sie $\mathrm{dom}(\Phi) \neq \mathrm{Ord}$. (25 Punkte)

   (*Hinweis*: Verwenden Sie das Ersetzungsaxiom, denken Sie auch daran, dass nach 3. gilt: $\mathrm{dom}(\Phi) = \Phi^{-1}[X]$.)

5. Zeigen Sie, dass $\mathrm{dom}(\Phi)$ eine Ordinalzahl ξ ist. (18 Punkte)

   (*Hinweis*: Verwenden Sie Induktion.)

6. Zeigen Sie, dass $\Phi : \xi \to X$ eine Bijektion ist. (9 Punkte)

Aufgabe 41

1. Beweisen Sie: Aus AC folgt die Aussage

   Für alle Mengen X existiert eine Funktion $f : \mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\} \to X$,
   so dass $f(A) \in A$ für alle $A \in \mathcal{P}(X)\backslash\{\emptyset\}$.

   (4 Punkte)

2. Beweisen Sie: Aus AC folgt der Zermelosche Wohlordnungssatz (ZWO):

   Für jede Menge X existiert eine bijektive Funktion $g : X \to \xi$, die X auf eine Ordinalzahl ξ abbildet .

   (3 Punkte)

   (*Hinweis*: Verwenden Sie Aufgabe 40.)

3. Beweisen Sie: Aus ZWO folgt AC. (10 Punkte)

   (*Hinweis*: $X := \bigcup\{F(x) \mid x \in \mathrm{dom}(F)\}$.)