MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT BONN

http://www.LiB.uni-bonn.de

Bonn, den 21. April 2004

Abgabe: Montag, 26. April 2004

Einführung in die Mathematische Logik

Prof. Dr. P. Koepke, Dr. B. Löwe

Sommersemester 2004

Übungsblatt 1

Aufgabe 1

Wir nennen eine Menge X **(höchstens) abzählbar**, falls eine Injektion $f : X \to \mathbb{N}$ existiert. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion

$$(n, m) \mapsto \ulcorner n, m \urcorner := \frac{n^2 + m^2 + 2nm + n + 3m}{2}$$

ist eine Bijektion von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

(b) Falls ein Alphabet $\mathbb{A}$ abzählbar ist, so ist auch die Menge $\mathbb{A}^n$ der $\mathbb{A}$-Wörter der Länge n abzählbar.

Hinweis. Induktion.

(c) Falls ein Alphabet $\mathbb{A}$ abzählbar ist, so ist auch die Menge $\mathbb{A}^*$ aller $\mathbb{A}$-Wörter abzählbar.

Aufgabe 2

Wir betrachten das Alphabet $\mathbb{A} = \{a, b\}$ und eine Erweiterung $\mathbb{B} := \mathbb{A} \cup \{t\}$. Eine Regel $r \subseteq (\mathbb{B}^*)^1 \times \mathbb{B}^* = \mathbb{B}^* \times \mathbb{B}^*$ heisse **kontextfrei** falls gilt:

Falls $(w, w') \in r$, so ist $w = t$.

Sei r_0 die 0-äre Regel $\{(\varnothing, t)\}$. Wir nennen eine Menge $L \subseteq \mathbb{A}^*$ **kontextfrei**, falls es eine kontextfreie Regel r gibt, so daß $L = \mathrm{Erz}(\{r, r_0\}) \cap \mathbb{A}^*$.

(a) Zeigen Sie, daß die Menge $L_0 := \{a^n b^n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ kontextfrei ist.

(b) Zeigen Sie, daß die Menge $L_1 := \{w \in \mathbb{A}^* \,;\, w \text{ enthält genausoviele } a\text{s wie } b\text{s}\}$ kontextfrei ist.

Anmerkung und Literaturhinweise. Kontextfreie Mengen von Wörtern (in der Chomsky-Hierarchie auch "Typ-2 Grammatiken" genannt) sind genau diejenigen Mengen von Wörtern, die durch sogenannte nichtdeterministische *pushdown*-Automaten entschieden werden können. Typ-2 Grammatiken spielen eine wichtige Rolle bei der Beschreibung von Programmiersprachen: Programmiersprachen mit einer kontextfreien Grammatik erlauben effiziente Parser-Algorithmen. Ihre Metasyntax wird oft in der sogenannten "Backus-Naur-Form" ausgedrückt.

Der indische Grammatiker Pāṇini hat in seiner Grammatik Aṣṭādhyāyī (fünftes Jahrhundert v.u.Z.) eine kontextfreie Beschreibung der indoeuropäischen Sprache Sanskrit entwickelt. Vgl. S. **Bhate**, S. **Kak**, Pāṇini's Grammar and Computer Science, **Annals of the Bhandarkar Oriental Research Institute** 72 (1993), p. 79–94; PDF-Datei auf unserer Webpage.

(c) Finden Sie heraus, wie die sogenannten Typ-0-, Typ-1- und Typ-3-Grammatiken aus der Chomsky-Hierarchie auch genannt werden.